IMPERIAL ENTOMOLOGICAL
23 APR 1945
INSTITUTE

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA

ARGENTINA

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

FEBRERO 1945 — ENTREGA II — TOMO CXXXIX

SUMARIO

PÁG.

A. E. SAGASTUME BERRA. — Sobre el grupo de restos módulo *n* 49

J. VARELA GIL. — Sobre los valores de las reacciones en los apoyos de la viga empotrada en sus extremos 65

EMILIO L. DÍAZ. — La circulación aérea superior en verano 86

BUENOS AIRES
CALLE SANTA FE 1145

1945

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

SOCIOS HONORARIOS

Dr. Pedro Visca †
Dr. Mario Isola †
Dr. Germán Burmeister †
Dr. Benjamín A. Gould †
Dr. R. A. Phillippi †
Dr. Guillermo Rawson †
Dr. Carlos Berg †
Dr. Valentín Balbín †
Dr. Florentino Ameghino †
Dr. Carlos Darwin †
Dr. César Lombroso †
Ing. Luis A. Huergo †
Ing. Vicente Castro †
Dr. Juan J. J. Kyle †
Dr. Estanislao S. Zeballos †
Ing. Santiago E. Barabino †
Dr. Carlos Spegazzini †
Dr. J. Mendizábal Tamborel †
Dr. Walter Nernst †
Dr. Alberto Einstein
Dr. Cristóbal M. Hicken †
Dr. Angel Gallardo †
Dr. Eduardo L. Holmberg †
Ing. Guillermo Marconi †
Ing. Eduardo Huergo †
Dr. Enrique Ferri †

CONSEJO CIENTIFICO

Ing. José Babini; Dr. Horacio Damianovich; Prof. Carlos E. Dieulefait; Dr. Juan A. Domínguez; Dr. Gustavo A. Fester; Dr. Joaquín Frenguelli; Dr. Josué Gollan (h.); Dr. Bernardo A. Houssay; Dr. Cristofredo Jakob; Dr. Emiliano J. Mac Donagh; Dr. R. Armando Marotta; Dr. Julio Méndez; Ing. Agr. Lorenzo R. Parodi; Dr. Franco Pastore; Capitán de fragata Héctor R. Ratto; Vicealmirante Segundo R. Storni; Dr. Alfredo Sordelli; Dr. Reinaldo Vanossi; Dr. Enrique V. Zappi.

JUNTA DIRECTIVA

(1943-1944)

Presidente	Doctor **Gonzalo Bosch**
Vicepresidente 1º	Ingeniero **Enrique Chanourdie**
Vicepresidente 2º	Doctor **Jorge Magnin**
Secretario de actas	Profesor **José F. Molfino**
Secretario de correspondencia	Doctor **E. Eduardo Krapf**
Tesorero	Ingeniero **Edmundo Parodi**
Bibliotecario	Ingeniero **José M. Páez**
Vocales	Doctor **Reinaldo Vanossi** Ingeniero **Belisario Alvarez de Toledo** Doctor **José Llauró** Ingeniero **Juan B. Marchionatto** Ingeniero **Carlos M. Gadda** Cap. de Frag. **Marcos A. Savon** Doctor **Carlos A. Bertomeu** Ingeniero **Alfredo G. Galmarini** Ingeniero **Gastón Wunenburger**
Suplentes	Ingeniero **Anecto J. Bosisio** Ingeniero **Héctor Ceppi** Ingeniero **Pedro Rossell Soler** Doctor **Elías A. De Cesare** Ingeniero **Juan B. Berrino**
Revisores de balances anuales	Doctor **Antonio Casaubert** Arquitecto **Carlos E. Géneau**

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escritos. Tienen derecho a la corrección de dos pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Artº 10 del Reglamento de los "ANALES" (modificado por la J. D. en su sesión de fecha 4 de septiembre 1941). Los escritos originales destinados a la Dirección de los "Anales", serán remitidos a la Administración de la Sociedad, calle Santa Fe 1145, a los efectos de registrar la fecha de entrega para luego enviarlos al señor Director. La Sociedad no tomará en consideración las observaciones de los autores que se refieran a cualquier anormalidad, si no se ha cumplido con el requisito indicado.

Impreso en los Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 311-425 - Buenos Aires

SOBRE EL GRUPO DE RESTOS MODULO n

POR

A. E. SAGASTUME BERRA

1. INTRODUCCION Y NOTACIONES. — Dado un número natural n las clases de restos de todos los enteros módulo n son en número de n y forman, con respecto a la operación de suma (mód. n), un grupo A_n, *grupo aditivo módulo n*. Su estructura es la más simple posible: es *cíclico*, engendrado por el elemento 1, que con sus «potencias» $1 + 1 = 2$, $1 + 1 + 1 = 3, \ldots, 1 + \ldots + 1 = n = 0$ da todos los elementos de A_n. El orden de un elemento cualquiera a, que indicaremos con *oad* (a) (*orden aditivo* de a) es:

$$oad\ (a) = \frac{n}{(n, a)} = \frac{[n, a]}{a} \qquad [1]$$

donde, (u, v) indica el m. c. d. y $[u, v]$ el m. c. m. de dos números u, v. En particular son de orden n, es decir, generadores de A_n, los $\varphi(n)$ elementos (1) a que son primos con n.

Estos $\varphi(n)$ elementos forman a su vez el grupo *multiplicativo* R_n de los restos primos con n: si a, b son primos con n, también $(ab,n) = 1$. En lo que sigue tratamos principalmente de este grupo, exponiendo muchas cosas conocidas, y algunas que creemos nuevas, especialmente ciertas relaciones entre elementos de A_n y R_n.

Por lo pronto, R_n, como grupo abeliano o conmutativo, admite una descomposición en producto directo de grupos cíclicos. Esto significa que pueden hallarse ciertos *generadores* $a_1, a_2, \ldots, a_s$, de

(1) $\varphi(n)$ es la conocida función de Euler o Gauss que se define justamente por la propiedad aquí mencionada. Para estas cuestiones véase, p. ej., [5] Cap. I y III; [6] Cap. I; [4] Cap. III (los números se refieren a la bibliografía al final).

ciertos órdenes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ [divisores de $\varphi(n)$] tales que cualquier $b \in R_n$ se expresa unívocamente (2)

$$\left.\begin{array}{l} b \equiv a_1^{\mu_1} a_2^{\mu_2} \ldots a_s^{\mu_s} \pmod{n} \\ 0 \leq \mu_i < \alpha_i \quad , \quad i = 1, \ldots, s \end{array}\right\} \qquad [2].$$

Usaremos la notación $o\,(\ )$ para el orden (*orden multiplicativo*) de un elemento de este grupo, de modo que, por ejemplo,

$$o\,(a_i) = \alpha_i \qquad [3]$$

y en general

$$o\,(a_i^{\mu_i}) = \frac{\alpha_i}{(\alpha_i, \mu_i)} = \frac{[\alpha_i\ \mu_i]}{\mu_i},$$

$$o\,(b) = o\,(a_1^{\mu_1} \ldots a_s^{\mu_s}) = \left[\frac{\alpha_1}{(\alpha_1, \mu_1)}, \ldots, \frac{\alpha_s}{(\alpha_s, \mu_s)}\right] \qquad [4].$$

Pondremos en general

$$n = p_1^{\nu_1} \ldots p_k^{\nu_k} \cdot 2^{\nu} = p_i^{\nu_i} P_i = 2^{\nu} P \quad (i = 1, \ldots, k) \qquad [5]$$

siendo los p_i factores primos impares, distintos entre sí, y los enteros $\nu_i \geq 0$ (y $\nu \geq 0$), conviniendo desde ya en excluir los casos triviales $n = 1$ y $n = 2$.

2. Estructura de R_n en general. — *Teorema* 2.1. — Si $n = n_1 n_2$, *siendo* n_1, n_2 *primos entre sí, es* $R_n = R_{n_1} \times R_{n_2}$ (*producto directo*), *siendo* R_{n_1} *el conjunto* (3) *de los* $b \in R_n$ *tales que* $b \equiv 1$ (*mód.* n_2), *y análogamente para* R_{n_2}.

Dem.: El conjunto G_1 de los elementos $b_1 \in R_n$ tales que $b_1 \equiv 1$ (mód. n_2) es evidentemente un subgrupo de R_n, de índice $\varphi(n_2)$ y por tanto de roden $\dfrac{\varphi(n)}{\varphi(n_2)} = \varphi(n_1)$.

Además, dos elementos b_1, b_1' de G_1 son incongruentes según n_1, pues

$$b_1 \equiv b_1' \pmod{n_1} \quad \text{y} \quad b_1 \equiv b_1' \equiv 1 \pmod{n_2}$$

(2) [6], Cap. III; [5], Cap. IV.

(3) Este conjunto es, en realidad, isomorfo al grupo R_{n_1} tal como ha sido definido; y la formulación exacta del teorema sería $R_n \cong R_{n_1} \times R_{n_2}$ ($\cong$ indica isomorfismo). Como es usual, no haremos la distinción entre grupos isomorfos.

implican $b_1 \equiv b_1'$ (*mód. n*), y los elementos no son distintos en R_n. Resulta así que G_1 no es sino R_{n_1} (salvo isomorfismos).

Del mismo modo, los $b_2 \in R_n$ con $b_2 \equiv 1$ (*mód.* n_1) constituyen el subgrupo R_{n_2}.

Dado ahora un $b \in R_n$, podemos determinar unívocamente (mód. n) una *componente* b_1 por medio de [4]

$$b_1 \equiv b \text{ (mód. } n_1) \quad , \quad b_1 \equiv 1 \text{ (mód. } n_2)$$

y otra b_2 por medio de

$$b_2 \equiv 1 \text{ (mód. } n_1) \quad , \quad b_2 \equiv b \text{ (mód. } n_2).$$

Con ello $b_i \in R_{ni}$ y además, multiplicando las congruencias escritas en columna, resulta

$$b \equiv b_1 b_2 \text{ (mód. } n_1) \quad , \quad b \equiv b_1 b_2 \text{ (mód. } n_2),$$

de donde $b \equiv b_1 b_2$ (*mód. n*). Y de aquí la tesis.

Según [5], y por aplicación reiterada del teorema, resulta el

Corolario 2.2 — $R_n = R_{p_1^{\nu_1}} \times \ldots \times R_{p_k^{\nu_k}} \times R_{2^\nu}$, *donde* $R_{p_i^{\nu_i}}$ *está formado por los* $b_i \equiv 1$ (*mód.* P_i), *y* R_{2^ν} *por los* $b \equiv 1$ (*mód.* P).

La investigación se reduce así, en principio, a la de los grupos *primarios* $R_{p_i^{\nu_i}}$, R_{2^ν}.

3. Estructura de R_{p^ν}, siendo $p > 2$. — Admitiremos el conocido teorema [5]

Teorema 3.1. — R_p *es cíclico.*

Este corresponde al caso $\nu = 1$. Existe entonces una *raíz primitiva* g (mód. p) de orden $\varphi(p) = p - 1$ que genera R_p; y entonces existen $\varphi(p-1) = \varphi[\varphi(p)]$ raíces primitivas, incongruentes (mód. p); y todas las $g + hp$ con $h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ son también raíces primitivas.

[4] [4], Cap. V. En general, si u, v son enteros primos entre sí, el sistema de congruencias

$$x \equiv a \text{ (mód. } u) \quad , \quad x \equiv b \text{ (mod.} v)$$

admite una solución única (mód. uv), que es

$$x \equiv a v^{\varphi(u)} + b u^{\varphi(v)} \text{ (mód. } u.\ v)$$

[5] [4], pág. 315.

Probemos ahora el

Lema 3.2. — *Si para la raíz primitiva* g *es*

$$g^{\varphi(p)} = g^{p-1} \equiv 1 + kp \pmod{p^2},$$

para todo $\nu \geq 2$ *se tiene también*

$$g^{\varphi(p^{\nu-1})} \equiv 1 + kp^{\nu-1} \pmod{p^\nu} \qquad [6],$$

de modo que $k = k_g$ *es independiente de* ν, *y depende solamente de* g. *Entre las* $g' = g + hp$ *puede determinarse una para la cual* $k_{g'} = k'$ *sea, a voluntad,* $\equiv 0$ o $\not\equiv 0$ *(mód. p).*

Dem.: *a*) Como [6] vale para $\nu = 2$, podemos aplicar inducción, suponiéndola ya demostrada para el exponente ν. Se puede entonces escribir:

$$g^{\varphi(p^{\nu-1})} \equiv 1 + kp^{\nu-1} + k^* p^\nu \equiv 1 + p^{\nu-1}(k + k^* p) \pmod{p^{\nu+1}}.$$

Como $\nu \geq 2$, es $\varphi(p^\nu) = p\,\varphi(p^{\nu-1})$ y $2\nu - 1 \geq \nu + 1$. Luego, elevando a la potencia p la congruencia anterior se tiene:

$$g^{\varphi(p^\nu)} \equiv 1 + p^\nu (k + k^* p) + \frac{p-1}{2} p^{2\nu-1} (k + k^* p)^2 + \ldots \equiv$$

$$\equiv 1 + kp^\nu \pmod{p^{\nu+1}},$$

quedando así probada [6].

b) Si $g' = g + hp$, el coeficiente $k_{g'} = k'$ está definido (mód. p) por:

$$g'^{p-1} \equiv 1 + k'p \equiv (g + hp)^{p-1} \equiv g^{p-1} + (p-1)\, g^{p-2} hp \equiv$$

$$\equiv 1 + kp - g^{p-2} hp \pmod{p^2},$$

es decir:

$$k' \equiv k - g^{p-2} h \pmod{p} \qquad [7]$$

Es claro entonces que, según sea $h \equiv kg$ *(mód. p)* o $h \not\equiv kg$ *(mód. p)*, será respectivamente $k' \equiv 0$ ó $k' \not\equiv 0$ (mód. p). c. q. d.

Teorema 3.3. — R_{p^ν} *es cíclico, es decir, existen raíces primitivas (mód.* p^ν*) para todo* ν *positivo* (6). *Toda raíz primitiva (mód.* p^ν*) es*

(6) [6], pág. 57.

de la forma $g + hp$, *y cada* g *da así* $\varphi(p^{\nu-1})$ *raíces primitivas, incongruentes entre sí* (*mód.* p^ν).

Dem.: *a*) Para que una raíz primitiva g (mód. p) lo sea (mód. p^ν) es necesario, evidentemente, que en [6] sea $k \not\equiv 0$ (*mód.* p). Recíprocamente, sea g elegida de tal modo que en

$$g^{p-1} \equiv 1 + kp \quad (\text{mód. } p^2)$$

sea $k \not\equiv 0$ (*mód.* p), lo cual es posible por el Lema 3.2, y entonces se verifica [6] para todo $\nu \geq 2$. Para probar que tal g es raíz primitiva (mód. p^ν) para todo $\nu \geq 1$, bastará demostrar que, dado b primo con p, existe un exponente γ tal que $b \equiv g^\gamma$ (mód. p^ν); en virtud del teorema de Euler (7), γ resultará unívocamente determinado (mód. $\varphi(p^\nu)$). Como la tesis se verifica para $\nu = 1$, la supondremos válida para el exponente $\nu - 1$ ($\nu \geq 2$) y aplicaremos inducción.

Supuesto (lo cual no es restrictivo) $0 < b < p^\nu$, sea q el cociente, a el resto de b módulo $p^{\nu-1}$:

$$b = qp^{\nu-1} + a \quad , \quad 0 \leq q < p \quad , \quad 0 \leq a < p^{\nu-1} \qquad [8]$$

Siendo $(a, p) = 1$, puede hallarse por hipótesis un α tal que

$$g^\alpha \equiv a \ (\text{mód. } p^{\nu-1});$$

pongamos entonces:

$$g^\alpha \equiv a + a^* p^{\nu-1} \ (\text{mód. } p^\nu) \qquad [9]$$

Siendo $(ak, p) = 1$ está además unívocamente determinado (mód. p) un número β, solución de la congruencia.

$$ak\beta + a^* \equiv q \ (\text{mód. } p) \qquad [10]$$

Pero entonces, si $\gamma = \alpha + \beta\varphi(p^{\nu-1})$ se tiene, en virtud de [6], [8], [9], [10]:

$$g^\gamma \equiv g^\alpha \cdot g^{\beta\varphi(p^{\nu-1})} \equiv (a + a^* p^{\nu-1})(1 + kp^{\nu-1})^\beta \equiv$$

$$\equiv (a + a^* p^{\nu-1})(1 + k\beta p^{\nu-1}) \equiv a + q\,p^{\nu-1} \equiv b \ (\text{mód. } p^\nu)$$

(7) [1], pág. 149.

b) Sea nuevamente g una raíz primitiva (mód. p) para la cual valga [6], pero ahora con k cualquiera. Podemos sin restricción suponer $0 < g < p$, y considerar aquellos de los números $g + hp$ comprendidos entre 0 y p^ν, de modo que $h = 0, 1, \ldots, p^{\nu-1} - 1$. Ya vimos además que el coeficiente k' correspondiente a un $g + hp$ está definido por [7]. Según que $h \not\equiv kg$ o $h \equiv kg$ (mód. p), $g + hp$ será o no raíz primitiva (mód. p^ν). Si h_0 es la (única) solución de $h_0 \equiv kg$ (*mód.* p) comprendida entre 0 y p, las $g + (h_0 + rp)\, p$ son las únicas $g + hp$ que no son raíces primitivas (mód. p^ν). Como aquí $0 \leq r < p^{\nu-2}$, las restantes $p^{\nu-1} - p^{\nu-2} = \varphi(p^{\nu-1})$ son raíces primitivas incongruentes entre sí (mód. p^ν), lo cual prueba la última afirmación del teorema.

c) Si $g + hp$, $g' + h'\, p$ son dos raíces primitivas (mód. p^ν) obtenidas en la forma descrita en *b*), y ocurriera que $g + hp \equiv g' + h'p$ (mód. p^ν), se deduciría $g \equiv g'$ (*mód.* p), de donde $g = g'$ (pues ambas están entre 0 y p) y entonces $h = h'$. Así, para las $\varphi(p - 1)$ raíces $g, g', \ldots$ se obtienen en total $\varphi(p^{\nu-1})\, \varphi(p - 1) = \varphi(p^{\nu-1}(p - 1)) = \varphi[\varphi(p^\nu)]$ raíces primitivas, incongruentes entre sí, mód. p^ν. Como el número de estas últimas es precisamente $\varphi[\varphi(p^\nu)]$, todas son de esta forma. c. q. d.

Corolario 3.4. — *Si g es raíz primitiva (mód. p^2), lo es (mód. p^ν) para todo $\nu \geq 2$* (y obviamente también para $\nu = 1$).

4. Estructura de R_{2^ν}. — Es obvio el

Teorema 4.1. — *R_2 se reduce a la identidad. R_4 es cíclico de orden* 2, *con la raíz primitiva* 3 (*mód.* 4).

En cambio, ya R_8 no es cíclico, sino el producto directo de dos grupos cíclicos de orden 2, de generadores 3 y $2^3 - 1 = 7$. Probaremos algo análogo para los R_{2^ν} con $\nu > 3$. Que tales grupos no sean cíclicos resulta ya del

Lema 4.2. — *Para $\nu \geq 3$ y a impar, es* $a^{1/2\,\varphi(2^\nu)} = a^{2^{\nu-2}} \equiv 1$ (*mód.* 2^ν).

Dem.: Siendo esto obvio para $\nu = 3$, supongámoslo demostrado para un $\nu \geq 3$. Entonces de

$$a^{2^{\nu-2}} \equiv 1 + k \cdot 2^\nu \text{ (mód. } 2^{\nu+1})$$

resulta, elevando al cuadrado,

$$a^{2^{\nu-1}} \equiv 1 + k \cdot 2^{\nu+1} + k^2\, 2^{2\nu} \equiv 1 \text{ (mód. } 2^{\nu+1}) \text{ , c. q. d.}$$

Lema 4.3. — *Para* $\nu \geq 3$ *es* $3^{2^{\nu-3}} \not\equiv 1$ (*mód.* 2^ν); *y más precisamente, si* $\nu \geq 4$, es $3^{2^{\nu-3}} \equiv 1 + 2^{\nu-1}$ (*mód.* 2^ν).

Dem.: Por inducción, puesto que la tesis es obvia para $\nu = 3$ ó 4. Si vale para un $\nu \geq 4$, de

$$3^{2^{\nu-3}} \equiv 1 + 2^{\nu-1} + k \,.\, 2^\nu \text{ (mód. } 2^{\nu+1}),$$

cuadrando se obtiene de inmediato.

$$3^{2^{\nu-2}} \equiv 1 + 2^\nu \qquad \text{(mód. } 2^{\nu+1}) \text{ c. q. d.}$$

Corolario 4.4. — *Si* Q *es impar y* $\nu \geq 4$, *es* $(3^{2^{\nu-3}})^Q \equiv 1 + 2^{\nu-1}$ (*mód.* 2^ν).

Lema 4.5. — *Para* $\nu \geq 3$, $0 \leq \alpha < 2^{\nu-2}$, es $3^\alpha \not\equiv -1$ (*mód.* 2^ν).

Dem.: Obvio para $\nu = 3$. Admitido para un $\nu \geq 3$, si fuera

$$3^\beta \equiv -1 \text{ (mód. } 2^{\nu+1}) \quad , \quad 0 \leq \beta < 2^{\nu-1},$$

y q es el cociente, α el resto de β, mód. $2^{\nu-2}$:

$$\beta = q \,.\, 2^{\nu-2} + \alpha \quad , \quad 0 \leq q < 2 \quad , \quad 0 \leq \alpha < 2^{\nu-2},$$

resultaría, teniendo en cuenta el Lema 4.2:

$$-1 \equiv (3^{2^{\nu-2}})^q \,.\, 3^\alpha \equiv 3^\alpha \text{ (mód. } 2^\nu),$$

contra la hipótesis. c. q. d.

Teorema 4.6. — R_{2^ν} *para* $\nu \geq 3$ *es el producto directo de dos (y no menos) grupos cíclicos, engendrados por el elemento* 3 (*de orden* $2^{\nu-2}$) *y* $2^\nu - 1$ (*de orden* 2) [8].

Dem.: R_{2^ν} no es cíclico, pues no existen elementos primitivos, es decir, de orden $\varphi(2^\nu)$ (Lema 4.2). El elemento 3 es de orden $2^{\nu-2}$ (Lemas 4.2 y 4.3); el $2^\nu - 1 \equiv -1$ (*mód.* 2^ν) es evidentemente de orden 2; y ambos son independientes por el Lema 4.5 Luego, el grupo que ambos generan es el producto directo, de orden $2^{\nu-2}.2 = \varphi(2^\nu)$, es decir, el grupo total R_{2^ν} c. q. d.

[8] [6], pág. 57.

5. Los casos generales. — Reuniendo los casos referentes a los grupos primarios por medio de Cor. 2.2 se tendrá la descripción del R_n más general. Conviene desde ya separar, según el valor del exponente ν en la fórmula [5], los cuatro casos siguientes:

Caso 0: es decir, $\nu = 0$ o sea n impar;
Caso 1: $\nu = 1$, n par pero no múltiplo de 4;
Caso 2: $\nu = 2$, n múltiplo de 4 pero no de 8;
Caso 3: $\nu > 3$, n múltiplo de 8.

Conviene además definir el número s, cuyo significado se verá enseguida, así:

$$\left.\begin{array}{ll} s = k & \text{en los Casos 0 y 1;} \\ s = k+1 & \text{en el Caso 2;} \\ s = k+2 & \text{en el Caso 3.} \end{array}\right\} (11),$$

observando además que k debe ser > 0 en los Casos 0 y 1, mientras que en los demás, $k \geq 0$.

Se tiene entonces el

Teorema 5.1. — *Si* $n = p_1^{\nu_1} \ldots p_k^{\nu_k} \cdot 2^{\nu}$, R_n *es un producto directo de* s *grupos cíclicos, constituídos así:*

Caso 0: *los grupos cíclicos son de órdenes* $\varphi(p_i^{\nu_i}) = \varphi_i$ $(i = 1, \ldots, k = s)$, *con generadores* a_i *que son raíces primitivas* (*mód.* $p_i^{\nu_i}$), *y además*

$$a_i \equiv 1 \pmod{P_i} \qquad [12]$$

En [3] *es* $\alpha_i = \varphi_i$, *y el orden máximo* [4] *de un elemento* [2] *se obtiene cuando* $(\varphi_i, \mu_i) = 1$ *y vale*

$$[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k] \qquad [13]$$

que es $< \varphi(n)$ *si* $k > 1$. *Sólo existen raíces primitivas cuando* $k = s = 1$.

Caso 1: *igual estructura que en el Caso* 0.

Caso 2: *además de los generadores* [12] *se tiene otro,* $a_{k+1} = a$, *con*

$$a \equiv 1 \pmod{P} \quad , \quad a \equiv 3 \pmod{4} \qquad [14]$$

cuyo orden es $\alpha = 2$. *El orden máximo es siempre* [13]. *No hay raíces primitivas sino cuando* $k = 0$.

Caso 3: *además de los generadores* [12], *hay otros dos*, $a_{k+1} = a$, $a_{k+2} = \bar{a}$,

$$\left.\begin{array}{ll} a \equiv 1 \text{ (mód. } P) & , \quad a \equiv 3 \text{ (mód. } 2^\nu) \\ \bar{a} \equiv 1 \text{ (mód. } P) & , \quad \bar{a} \equiv -1 \text{ (mód. } 2^\nu) \end{array}\right\} \qquad [15]$$

de órdenes $\alpha = 2^{\nu-2} = \dfrac{1}{2}\varphi(2^\nu) \equiv \dfrac{1}{2}\varphi$ y $\bar{\alpha} = 2$. *El orden máximo de un elemento es*

$$[2^{\nu-2}, \varphi_1, \ldots, \varphi_k] < \varphi(n) \qquad [16]$$

y en consecuencia, no hay raíces primitivas.

6. Relaciones entre ordenes multiplicativos y aditivos. — Según el Teor. 5.1, quedan definidos los generadores a_i que figuran en la expresión [2] de un elemento cualquiera $b \in R_n$. En el Caso 2, llamaremos μ al exponente μ_{k+1} del generador $a_{k+1} = a$. En el Caso 3, análogamente, serán μ, $\bar{\mu}$ los exponentes μ_{k+1}, μ_{k+2} de los generadores $a_{k+1} = a$, $a_{k+2} = \bar{a}$, definidos por [15]. Convendremos asimismo para lo sucesivo, en que $\mu = \bar{\mu} = 0$ en los Casos 0 y 1, y $\bar{\mu} = 0$ en el Caso 2.

Teorema 6.1. — *Dado un elemento* $b \in R_n$ *según* [2], *definamos los números* $\varsigma_i(b) = \varsigma_i$, $\varsigma(b) = \varsigma$ *por medio de*.

$$\left.\begin{array}{ll} \mu_i \equiv 0 \text{ (mód. } \varphi(p_i^{\varsigma_i})) & i = 1, \ldots, k \\ \not\equiv 0 \text{ (mód. } \varphi(p_i^{\varsigma_i+1})) & 0 \le \varsigma_i \le \nu_i \end{array}\right\} \qquad [17]$$

y además:

$$\left.\begin{array}{lll} \textit{en los Casos } 0 \text{ y } 1: & \varsigma = 0; & \\ \textit{en el Caso } 2: & \varsigma = 2; & \\ \textit{en el Caso } 3: & \mu \equiv 0 \text{ (mód. } 2^{\varsigma-2}) & 2 \le \varsigma \le \nu \\ & \not\equiv 0 \text{ (mód. } 2^{\varsigma-1}) & \end{array}\right\} \qquad [18]$$

Entonces se tiene:

$$(n, b-1) = \left\{\begin{array}{ll} p_1^{\varsigma_1} \ldots p_k^{\varsigma_k} \cdot 2^\varsigma & \text{si } \mu \equiv \bar{\mu} \text{ (mód. 2)} \\ p_1^{\varsigma_1} \ldots p_k^{\varsigma_k} \cdot 2 & \text{si } \mu \not\equiv \bar{\mu} \text{ (mód. 2)} \end{array}\right\} \qquad [19]$$

Dem.: *a)* A causa de [5], es claro en primer lugar que

$$(n, b-1) = (p_i^{\nu_i}, b-1)\,(P_i, b-1) = (2^\nu, b-1) \cdot (P, b-1) =$$
$$= (p_1^{\nu_1}, b-1) \ldots (p_k^{\nu_k}, b-1) \cdot (2^\nu, b-1)$$

y bastará determinar $(p_i^{\nu_i},\ b-1)$ $(i=1,\ \ldots,\ k)$ y $(2^\nu,\ b-1)$ si $\nu > 0$. Pero como además es $a_i \equiv 1$ (*mód.* P_i) y (si $\nu > 0$) $a \equiv \bar{a} \equiv 1$ (*mód.* P) (Teor. 5.1), en particular se tiene $a_i \equiv 1$ (*mód.* $p_j^{\nu_j}$), $a \equiv \bar{a} \equiv 1$ (*mód.* $p_j^{\nu_j}$) $(j \neq i)$ y en consecuencia

$$\left.\begin{aligned} b-1 \equiv a_1^{\mu_1} \ldots a_s^{\mu_s} - 1 &\equiv a_i^{\mu_i} - 1 \quad (\text{mód. } p_i^{\nu_i}) \\ &\equiv a^{\mu}\,\bar{a}^{\bar{\mu}} - 1 \quad (\text{mód. } 2^\nu) \end{aligned}\right\} \quad [20],$$

de modo que bastará considerar $(p_i^{\nu_i},\ a_i^{\mu_i}-1)$ y $(2^\nu,\ a^{\mu}\bar{a}^{\bar{\mu}}-1)$.

b) Las [17] equivalen, por el Lema 3.2 y el teorema de Euler, a

$$a_i^{\mu_i} - 1 \equiv 0 \ (\text{mód. } p_i^{\varsigma_i}) \quad , \quad \text{pero } \not\equiv 0 \ (\text{mód. } p_i^{\varsigma_i+1}),$$

y en consecuencia,

$$(p_i^{\nu_i}\,,\ a_i^{\mu_i} - 1) = p_i^{\varsigma_i}\,,$$

que, según lo dicho en *a*) y las [18], prueban ya [19] en los Casos 0 y 1.

c) Sea ahora el Caso 2, en el cual $\bar{\mu} = 0$ y $\mu = 0$ ó 1. Según cuál de estos valores se tome, se tiene (véase [14]) $(2^2,\ a^{\mu}-1) = 2^2$ ó 2^1, lo cual prueba nuevamente [19].

d) En el Caso 3 puede ponerse, a causa de [18], $\mu = 2^{\varsigma-2}Q$, con Q impar. Por [15] se tiene entonces:

$$a^{\mu} \equiv (3^{2^{\varsigma-2}})^Q \quad , \quad \bar{a}^{\bar{\mu}} \equiv (-1)^{\bar{\mu}} \qquad (\text{mód. } 2^\nu)$$

y

$$a^{\mu}\,\bar{a}^{\bar{\mu}} \equiv (3^{2^{\varsigma-2}})^Q\,(-1)^{\bar{\mu}} \qquad (\text{mód. } 2^\nu) \qquad [21]$$

Analicemos las diversas posibilidades: si μ es impar, es $\varsigma = 2$ y entonces

$$\begin{aligned} a^{\mu}\,\bar{a}^{\bar{\mu}} &\equiv 3^Q\,(-1)^{\bar{\mu}} \equiv 3\,(-1)^{\bar{\mu}} \qquad (\text{mód. } 8) \\ &\equiv (-1)^{\bar{\mu}+1} \qquad (\text{mód. } 4) \\ &\equiv 1 \qquad (\text{mód. } 2). \end{aligned}$$

Si también $\bar{\mu}$ es impar, resulta $a^{\mu}\,\bar{a}^{\bar{\mu}} - 1$ múltiplo de 4 pero no de 8, de acuerdo con la primera de las [19]. Si $\bar{\mu} = 0$, hay divisibilidad por 2 pero no por 4, en concordancia con la segunda [19].

Sea ahora μ par, esto es, $\varsigma > 2$: [21] y el Cor. 4.4 dan

$$a^{\mu}\,\bar{a}^{\bar{\mu}} \equiv (-1)^{\bar{\mu}}\,(1 + 2^{\varsigma}) \qquad (\text{mód. } 2^{\varsigma+1}),$$

y entonces, según que $\bar{\mu} = 0$ ó 1:

$$a^{\mu}\,\bar{\omega}^{\bar{\mu}} - 1 \equiv 0 \text{ (mód. } 2^{\varsigma}) \quad , \quad \text{pero } \not\equiv 0 \text{ (mód. } 2^{\varsigma+1}),$$

o

$$a^{\mu}\,\bar{\omega}^{\bar{\mu}} - 1 \equiv 0 \text{ (mód. } 2) \quad , \quad \text{pero } \not\equiv 0 \text{ (mód. } 4),$$

también de acuerdo con [19] c. q. d.

Corolario 6.2. — *Si se pone* $\delta_i = (n, a_i - 1)$ $(i = 1, \ldots, s)$, *en particular* (*en los Casos* 2 *y* 3) $\delta = (n, a - 1)$ *y* (*en el Caso* 3) $\bar{\delta} = (n, \bar{a} - 1)$, *y además*

$$\Delta = (\delta_1, \ldots \delta_s) = (n, a_1 - 1, \ldots, a_s - 1)$$

es $\delta_i = P_i$ *para* $i = 1, \ldots, k$; *en el Caso* 2, $\delta = 2P$, *y en el Caso* 3, $\delta = \bar{\delta} = 2P$. *Además,* $\Delta = 1$ *en el Caso* 0, *y* $\Delta = 2$ *en los demás.*

Teorema 6.3. — *El orden de* $b \in R_n$ *no es nunca mayor que el orden aditivo de* $b - 1$. *Más precisamente: en la desigualdad*

$$oad\,(b-1) \geq o\,(b) \qquad [22]$$

el signo $=$ *vale solamente en las siguientes condiciones:*

Caso 0: *cuando* $\mu_i \equiv 0$ (*mód.* $p_i - 1$) *para todo* $i = 1, \ldots, k$, *en cuyo caso,*

$$oad\,(b-1) = o\,(b) = p_1^{\nu_1 - \varsigma_1} \ldots p_k^{\nu_k - \varsigma_k} \qquad [23];$$

Casos 1, 2 *y* 3: *si* $n = 4$, *siempre; si* $n \neq 4$ *cuando, además de la condición del Caso* 0, *sea* $\mu \equiv \bar{\mu}$ (*mód.* 2), *y entonces*

$$oad\,(b-1) = o\,(b) = p_1^{\nu_1 - \varsigma_1} \ldots p_k^{\nu_k - \varsigma_k} . 2^{\nu - \varsigma} \qquad [24]$$

Dem.: a) Sea primero el Caso 0 con $k = 1$, es decir, suprimiendo por comodidad los índices, el caso de un grupo primario R_{p^ν} con $p > 2$ Entonces $b \equiv a^{\mu}$ (*mód.* p^{ν}). Sea q el cociente, q_{-1} el resto de μ dividido por $\varphi(p) = p - 1$:

$$\mu = q\,\varphi(p) + q_{-1} \quad , \quad 0 \leq q < p^{\nu-1} \quad , \quad 0 \leq q_{-1} < p - 1 \qquad [25]$$

Sea además

$$q = q_{\nu-2}\,p^{\nu-2} + q_{\nu-3}\,p^{\nu-3} + \ldots + q_1\,p + q_0 \quad , \quad 0 \leq q_i \leq p - 1 \qquad [26]$$

el desarrollo de q en base p. Como en general

$$\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-\beta}\,\varphi(p^\beta) \qquad \text{para } 1 \leq \beta \leq \alpha \qquad [27]$$

es claro que

$$\mu = q_{\nu-2}\,\varphi(p^{\nu-1}) + q_{\nu-3}\,\varphi(p^{\nu-2}) + \ldots + q_0\,\varphi(p) + q_{-1} \qquad [28]$$

Si $\mu \not\equiv 0$ (*mód.* $\varphi(p)$), es decir, $q_{-1} \neq 0$, es $a^\mu \not\equiv 1$ (*mód.* p). El orden Θ de b es un divisor (propio o no) de $\varphi(p^\nu)$, mientras que $oad\ (b-1)$ es $\dfrac{n}{(n, b-1)}$. Por [19] se tiene entonces (puesto que $\varsigma_1 = \varsigma = 0$)

$$oad\ (b-1) = \frac{n}{(n, b-1)} = p^\nu > \varphi(p^\nu) \geq \Theta.$$

Sea ahora $\mu \equiv 0$ (*mód.* $\varphi(p)$), o sea $q_{-1} = 0$, y para mayor generalidad supongamos, en concordancia con [17],

$$q_{-1} = q_0 = \ldots = q_{\varsigma-2} = 0 \quad , \quad q_{\varsigma-1} \neq 0.$$

Entonces, por [19], [27] y observando que $Q = q_{\nu-2}\,p^{\nu-\varsigma-1} + \ldots + q_{\varsigma-1}$ es primo con p,

$$oad\ (b-1) = \frac{n}{(n, b-1)} = p^{\nu-\varsigma},$$

$$\Theta = o(b) = \frac{o(a)}{(o(a), \mu)} = \frac{p^{\nu-\varsigma}\,\varphi(p^\varsigma)}{(p^{\nu-\varsigma}\varphi(p^\varsigma), Q\,\varphi(p^\varsigma))} = \frac{p^{\nu-\varsigma}}{(p^{\nu-\varsigma}, Q)} = p^{\nu-\varsigma},$$

que demuestran la [23] para este caso.

b) Sea ahora el grupo primario R_{2^ν}. El Caso 1 está entonces excluído, y para $\nu = 2$ el teorema es obvio. Sea, pues, $\nu \geq 3$ (Caso 3), $b \equiv a^\mu\,\bar{a}^{\bar{\mu}}$ (*mód.* n). Se tiene:

$$\Theta = o(b) = [\,o(a^\mu), o(\bar{a}^{\bar{\mu}})\,] \doteq \left[\frac{2^{\nu-2}}{(2^{\nu-2}, \mu)}, \frac{2}{(2, \bar{\mu})}\right].$$

Si μ es impar, es claro que $\Theta = 2^{\nu-2}$ y, por [19], según sea $\bar{\mu} = 0$ ó 1, es:

$$oad\ (b-1) = \frac{n}{(n, b-1)} = 2^{\nu-1} > \Theta$$

o

$$oad\ (b-1) = 2^{\nu-2} = \Theta.$$

Si μ es par, $\mu = 2^{\varsigma-2}\, Q$ (Q impar), resulta

$$\Theta = \begin{cases} 2^{\nu-\varsigma} & \text{si} \quad \varsigma < \nu \\ \dfrac{2}{(2, \bar{\mu})} & \text{si} \quad \varsigma = \nu, \end{cases}$$

y también en cada uno de estos subcasos, que se subdividen a su vez según que $\bar{\mu} = 0$ ó 1, es inmediato verificar la validez de [24].

c) Probado el teorema para los grupos primarios, resulta sin dificultad en general. Sea $b \equiv a_1^{\mu_1} \ldots a_s^{\mu_s}$ (*mód.* n). Si se pone

$$\theta_i = \frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \mu_i)} \quad , \quad \theta = \frac{2^{\nu-2}}{(2^{\nu-2}, \mu)} \quad , \quad \bar{\theta} = \frac{2}{(2, \bar{\mu})},$$

éstos son los órdenes de $a_i^{\mu_i}$, a^{μ} y $\bar{a}^{\bar{\mu}}$, respectivamente. El orden Θ de b es entonces según la [4],

$$\Theta = [\theta_1, \ldots, \theta_k, \theta, \bar{\theta}] \qquad [29]$$

En el Caso 0, si por ejemplo $\mu_1 \not\equiv 0$ (*mód.* $p_1 - 1$) es $\varsigma_1 = 0$ en [17], y según [19],

$$oad\,(b-1) = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2-\varsigma_2} \ldots p_k^{\nu_k-\varsigma_k} > \varphi_1 p_2^{\nu_2-\varsigma_2} \ldots p_k^{\nu_k-\varsigma_k} \geq$$
$$\geq \varphi_1 \theta_2 \ldots \theta_k \geq \Theta;$$

en cambio si todos los $\mu_i \equiv 0$ (*mód.* $p_i - 1$), los $\theta_i = p_i^{\nu_i-\varsigma_i}$ son prmos entre sí, y

$$oad\,(b-1) = p_1^{\nu_1-\varsigma_1} \ldots p_k^{\nu_k-\varsigma_k} = \theta_1 \ldots \theta_k = \Theta.$$

En los restantes Casos (excluyendo $n = 4$, ya tratado), siendo $b \equiv a_1^{\mu_1} \ldots a_k^{\mu_k} a^{\mu} \bar{a}^{\bar{\mu}}$ (*mód.* n), si algún $\mu_i \not\equiv 0$ (*mód.* $p_i - 1$), vale igual razonamiento y conclusión que antes. Lo mismo si $\mu \not\equiv \bar{\mu}$ (*mód.* 2), pues entonces $2^{\nu-1} > \theta\,\bar{\theta}$; mientras que si todos los $\mu_i \equiv 0$ (*mód.* $p_i - 1$) y $\mu \equiv \bar{\mu}$ (*mód.* 2),

$$oad\,(b-1) = \theta_1 \ldots \theta_k \,.\, 2^{\nu-\varsigma} = \Theta \quad , \quad \text{c. q. d.}$$

7. Otras relaciones. — En ciertos problemas interesa considerar las propiedades de las funciones

$$\psi\,(b; t) = \frac{b^t - 1}{b - 1} \qquad [30]$$

$$\omega\,(b; t) = (n, \psi\,(b; t)) \qquad [31]$$

donde, como siempre, b es un elemento de R_n. Es evidente que si se reemplaza en [30], [31], b por otro número congruente (mód. n), el valor de ψ (*mód. n*) y el de ω no se modifican.

Si $t = o(b)$, las funciones [30], [31] toman valores especialmente interesantes, que indicaremos, más sencillamente, así:

$$\psi(b; o(b)) = \psi(b) \qquad [32]$$

$$\omega(b; o(b)) = \omega(b) \qquad [33]$$

Lema 7.1. — *Si* σ *es el cociente,* τ *el resto, de* t *módulo* $\Theta = o(b)$, *se tiene*:

$$\psi(b; t) \equiv \sigma\,\psi(b) + \psi(b; \tau) \text{ (mód. } n).$$

Dem.: Inmediata: de $t = \sigma\Theta + \tau$, [30] y [32] resulta:

$$\psi(b; t) = (1 + b + \ldots + b^{\Theta-1}) + b^{\Theta}(1 + b + \ldots + b^{\Theta-1}) + \ldots +$$

$$+ b^{\sigma\Theta}(1 + b + \ldots + b^{\tau-1}) = \frac{b^{\Theta}-1}{b-1}(1 + b^{\Theta} + \ldots + b^{(\sigma-1)\Theta}) +$$

$$+ b^{\sigma\Theta}\frac{b^{\tau}-1}{b-1} \equiv \sigma\,\psi(b) + \psi(b; \tau) \text{ (mód. } n),$$

pues $b^{\Theta} \equiv 1$ (*mód. n*). c. q. d.

Lema 7.2. — $\omega(b)$ *es múltiplo de* $oad\,(b-1)$.

Dem.: Como $\omega(b) = (n, \psi(b))$, basta demostrar que $\psi(b)$ es múltiplo de $oad\,(b-1)$; y esto resulta de que $b^{\Theta} - 1 \equiv 0$ (*mód. n*), pues entonces

$$\psi(b) = \frac{b^{\Theta}-1}{b-1} \equiv 0\left(\text{mód. } \frac{n}{(n, b-1)}\right)$$

y

$$\frac{n}{(n, b-1)} = oad\,(b-1) \text{ c. q. d.}$$

Corolario 7.3. — *Es siempre* $\omega(b) \geq o(b)$; *y para que aquí valga el signo de igualdad, es necesario y suficiente que* b *cumpla las condiciones del Teor.* 6.3 *y además, que sea* $\omega(b) = oad\,(b-1)$.

Dem.: Por el Lema 7.2 es $\omega(b) \geq oad\,(b-1)$; por el Teor. 6.3, $oad\,(b-1) \geq o(b)$. De aquí resulta la conclusión. c. q. d.

Las condiciones del Teor. 6.3 por sí o la $\omega(b) = oad\,(b-1)$ por sí no son suficientes para que $\omega(b) = o(b)$, como se prueba en los siguientes ejemplos:

a) Para $n = 4(2k+1)$, $b = 2(2k+1)+1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ es inmediato verificar que $oad\ (b-1) = o\ (b) = 2$, es decir, se cumplen las condiciones del Teor. 6.3; pero

$$\omega\ (b) = \left(n, \frac{b^2-1}{b-1}\right) = (4\ (2k+1)\ ,\ 4\ (k+1)) = 4 > o\ (b).$$

b) Para $n = p$ (primo impar), $b = p-1$, es $o\ (b) = 2$, $oad\ (b-1) = p$ y $\omega\ (b) = p = oad\ (b-1)$, pero $\omega\ (b) > o\ (b)$.

Vamos a calcular ahora las ψ y las ω para los generadores $a_i, a, \overline{a}$. Como $o\ (a_i) = \varphi_i$ y $1, a_i, a_i^2, \ldots, a_i^{\varphi_i - 1}$ son todos los elementos de $R_{p_i^{\nu_i}}$, es evidentemente

$$\psi\ (a_i) = 1 + a_i + a^2{}_i + \ldots + a_i^{\varphi_i - 1} \equiv 0 \pmod{p_i^{\nu_i}};$$

por otra parte, $a_i \equiv 1$ $(mód.\ P_i)$, de donde:

$$\psi\ (a_i) \equiv \varphi_i \pmod{P_i};$$

luego, siendo $(p_i^{\nu_i}, P_i) = 1$, $p_i^{\nu_i} P_i = n$, se deduce (9)

$$\psi\ (a_i) \equiv \varphi_i\, p_i^{\nu_i \varphi(P_i)} \pmod{n} \qquad [34]$$

De aquí resulta, a su vez:

$$\omega\ (a_i) = (p_i^{\nu_i} P_i\, \varphi_i\, p_i^{\nu_i \varphi(P_i)}) = p_i^{\nu_i}\ (P_i, \varphi_i),$$

y como $\varphi_i = p_i^{\nu_i - 1}\ (p_i - 1)$ y P_i es primo con p_i :

$$\omega\ (a_i) = p_i^{\nu_i}\ (P_i, p_i - 1) \qquad [35]$$

Para el generador a de los Casos 2 y 3 es naturalmente $\psi(a) \equiv \psi(3)$ $(mód.\ 2^\nu)$. Teniendo en cuenta los Lemas 4.2 y 4.3 se tiene entonces:

$$\psi\ (3) = \frac{3^{2^{\nu-2}} - 1}{2} \equiv 0 \pmod{2^{\nu-1}}, \text{ pero } \not\equiv 0 \pmod{2^\nu}.$$

Por otra parte, el mismo razonamiento del caso anterior da

$$\psi\ (a) \equiv 2^{\nu-2} \pmod{P}.$$

De ésta y la anterior resulta entonces:

$$\psi\ (a) \equiv 2^{\nu-2 + (\nu-1)\,\varphi\,(P)} \left(\text{mód.}\ \frac{n}{2}\right) \qquad [36]$$

(9) Ver nota (4).

Si esta congruencia se verificase también (mód. n), y en consecuencia también (mód. 2^ν), se deduciría

$$\psi(3) = \frac{3^{2^{\nu-2}} - 1}{2} \equiv 2^{\nu-2} + (\nu-1)\,\varphi(P) \quad (\text{mód. } 2^\nu)$$

y entonces

$$3^{2^{\nu-2}} - 1 \equiv 2^{(\nu-1)[1+\varphi(P)]} \quad (\text{mód. } 2^{\nu+1})$$

que, siendo $\varphi(P) > 0$, daría $3^{2^{\nu-2}} \equiv 1$ (*mód.* $2^{\nu+1}$), en contra del Lema 4.3. Por consiguiente, [36] permite concluir

$$\psi(a) \equiv 2^{\nu-2} + (\nu-1)\,\varphi(P) + \frac{n}{2} \quad (\text{mód. } n) \qquad [37]$$

De aquí resulta, a su vez,

$$\omega(a) = (n, \psi(a)) = 2^{\nu-1}\,(2P, 2^{\nu-2+(\nu-1)[\varphi(P)-1]} + P) = 2^{\nu-1} \qquad [38]$$

Finalmente, para el generador $\bar{a}$ del Caso 3, de orden 2, valen consideraciones análogas: de

$$\psi(\bar{a}) = 1 + \bar{a} \equiv 2 \quad (\text{mód. } P)$$
$$\equiv 0 \quad (\text{mód. } 2^\nu)$$

resulta inmediatamente

$$\psi(\bar{a}) \equiv 2^{1+\nu\varphi(P)} \quad (\text{mód. } n) \qquad [39]$$

y

$$\omega(\bar{a}) = 2^\nu \qquad [40]$$

BIBLIOGRAFIA

(1) Birkhoff, G., y Mc Lane, S. — *A survey of modern Algebra*. New York (1941).
(2) Hasse, H. — *Höhere Algebra*, t. I (Göschen)-Berlin-Leipzig, 2° ed. (1933).
(3) Hasse, H. — *Höhere Algebra*, t. II (Göschen)-Berlin-Leipzig (1927).
(4) Haupt, O. — *Einführung in die Algebra*. Leipzig (1929).
(5) Miller-Blichfeldt-Dickson. — *Theory and applications of finite groups*. New York (1938).
(6) Speiser, A. — *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*. Berlin, 2° ed. (1927).
(7) van der Waerden, B. L. — *Moderne Algebra*, t. I. Berlin (1930).
(8) van der Werden, B. L. — *Moderne Algebra*, t. II. Berlin (1931)

La Plata, Noviembre 1944.

SOBRE LOS VALORES DE LAS REACCIONES EN LOS APOYOS DE LA VIGA EMPOTRADA EN SUS EXTREMOS

POR

J. VARELA GIL

Este trabajo fué examinado por algunos profesores de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires. Uno de ellos no le encontró nada objetable; otro no llegó a formular claramente su opinión al respecto, y un tercero se manifestó en completo desacuerdo con lo que aquí se expone.

Debido a esta diversidad de pareceres decidió el autor someter su parte esencial, párrafos 1, 2, 3, 4, 6 y 9 a la consideración de una de las más altas autoridades en estas cuestiones, el profesor S. Timoshenko. Y en vista de lo expresado por este profesor en la carta que se transcribe, resolvió publicarlo.

STANFORD UNIVERSITY

SCHOOL OF ENGINEERING

Department of Mechanical Engineering *Stanford University, California*

May. 19, 1944.

ING. J. VARELA GIL
Calle Tucumán 900 2º piso
Buenos Aires, South America
República Argentina.

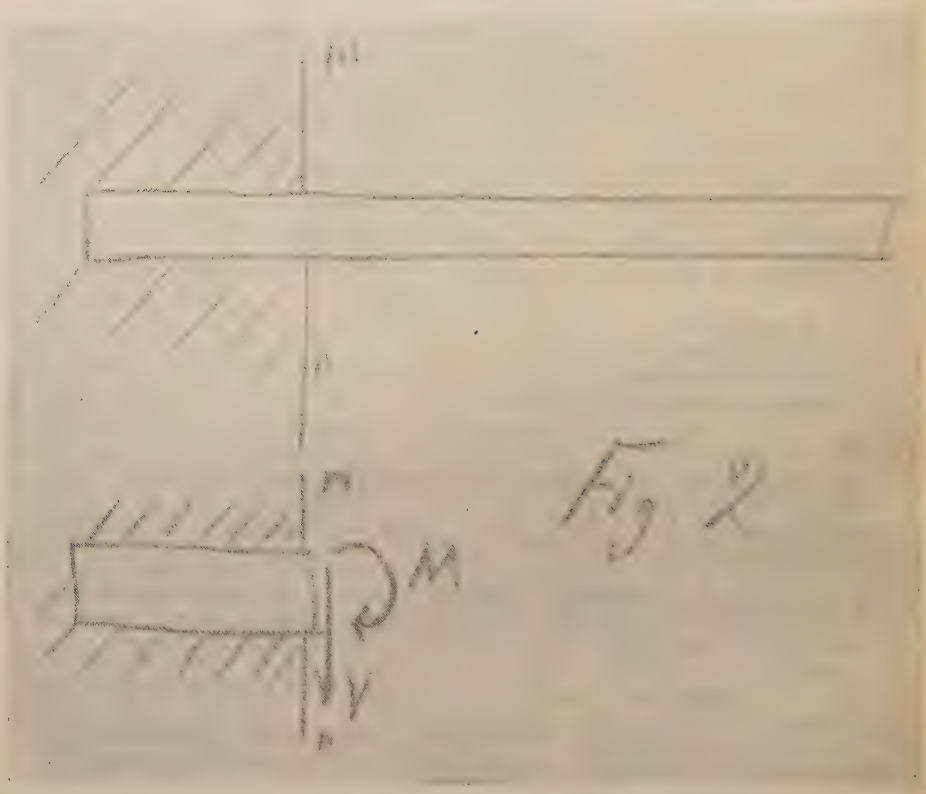
Dear Sir:

I have read your article concerning the reactions at the built-in ends of beams and did not find anything wrong in your calculations. The true distribution of forces acting on a built-in end of a beam remains, usually, unknown and to get these forces various hypothesis can be made.

On page 8 of your manuscript, you assume a uniform distribution of reactions. Sometimes a triangular distribution, such as in Fig. 1, is assumed and the magnitude of the triangles is selected so as to obtain the correct values of the bending moment and of the shearing force at the cross section mn.

Sometimes the built-in end is considered as a beam on elastic foundation, Fig. 2, and formulas from the pages 12 and 13 of my Strength of Materials, Volume 2, are used.

In practical applications, very often we make only the calculation of the bending moment and of the shearing force at the cross section mn coinciding



Croquis hechos por el Prof. Timoshenko.

with the face of the wall (these quantities are independent of reaction distribution along the built-in ends) and assume that the built-in end is so reinforced that it can stand any unfavorable distribution of reactions. But it is desirable to have at least an approximate picture of the actual force distribution at the ends.

Photoelastic experiments give very interesting and instructive pictures of local stress distribution at the built-in ends of rectangular baems.

Very truly yours,
S. Timoshenko
Stephen P. Timoshenko
Professor of Theoretical
and Applied Mechanics

TRADUCCION DE LA CARTA ANTERIOR

He leído su artículo referente a las reacciones en los extremos empotrados de las vigas y no encontré nada erróneo en sus cálculos. La verdadera distribución de las fuerzas que actúan sobre un extremo empotrado de una viga permanece, generalmente, desconocida y para obtener estas fuerzas pueden hacerse varias hipótesis.

En la página 8 de su manuscrito supone usted una distribución uniforme de las reacciones. Algunas veces se supone una distribución triangular tal como la de la Fig. 1 y se elige la magnitud de los triángulos de tal manera que se obtengan los valores exactos del momento de flexión y del esfuerzo cortante en la sección transversal mn.

En ocasiones se considera el extremo empotrado como una viga sobre fundación elástica, y se usan las fórmulas de las páginas 12 y 13 de mi Resistencia de Materiales, volumen 2.

En las aplicaciones prácticas hacemos con mucha frecuencia, solamente el cálculo del momento de flexión y del esfuerzo cortante en la sección transversal mn que coincide con la cara de la pared (estas cantidades son independientes de la distribución de las reacciones a lo largo del extremo empotrado) y se supone que el extremo empotrado está reforzado de tal modo que puede soportar una distribución desfavorable de las reacciones. Pero es de desear el tener cuando menos, una imagen aproximada de la real distribución de las fuerzas en los extremos.

Experimentos fotoelásticos dan muy interesantes e instructivas imágenes de la distribución local de los esfuerzos en los extremos empotrados de las vigas rectangulares.

1. Pudiera parecer que carece de interés el volver a tratar cuestiones referentes a la flexión de la viga empotrada en sus extremos, porque los problemas planteados por tal estudio se consideran, al parecer, resueltos desde hace mucho tiempo.

Sin embargo, el párrafo de la Estática de *Saliger* que se cita a continuación, y los experimentos que brevemente se describen después, autorizan a que se analicen de nuevo en algunos casos, los valores de las reacciones en los apoyos, dados por las fórmulas conocidas.

Saliger dice en la página 33 de su Estática Aplicada (1):

« Ejemplo 2º — Viga empotrada en un muro (fig. 51)» (fig. 1).

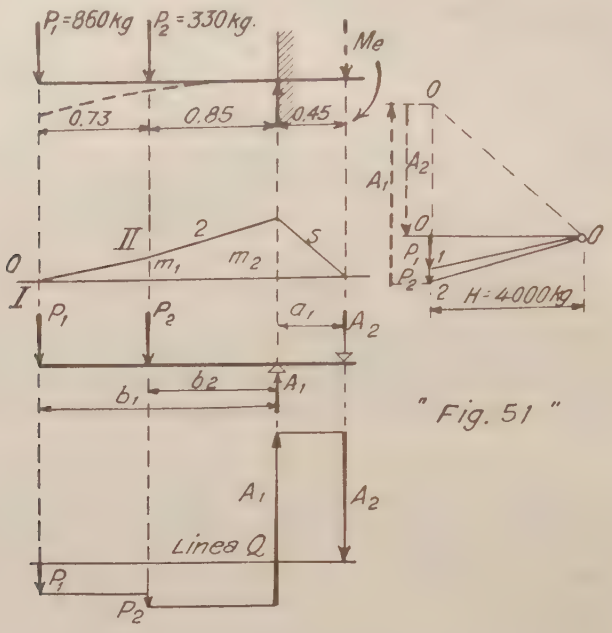


Fig. 1.

« El empotramiento está asegurado en el apoyo por la reacción A_1 que actúa en el sentido ascedente, y por A_2 dirigida en sentido opuesto.

« El momento de flexión, referido al punto A_1 es:

$$- P_1 b_1 - P_2 b_2 + A_2 a_1 = 0$$

de donde

$$A_2 = \frac{P_1 b_1 + P_2 b_2}{a_1} = \frac{860 \,.\, 1\,58 + 330 \,.\, 0\,85}{0{,}45} = 3{,}650 \text{ kg.}$$

« De la ecuación

$$P_1 + P_2 - A_1 + A_2 = 0$$

se deduce inmediatamente

$$A_1 = P_1 + P_2 + A_2 = 860 + 330 + 3.650 = 4.840 \text{ kg} \text{ ».}$$

(1) Saliger. — *Estática aplicada.* Segunda edición española, traducida de la segunda edición alemana. Editorial Labor. Buenos Aires, 1939.

Como acaba de verse, Saliger admite que el efecto de la fuerza A_2 equivale al empotramiento, y encuentra que la intensidad de la reacción A_1 es igual a la suma de las fuerzas $P_1 + P_2$ aumentada en el valor de A_2. La fórmula que se emplea para calcular el valor de la reacción en el apoyo de la viga empotrada por un extremo es, como se sabe,

$$R_1 = \Sigma P_i$$

la cual no conduce al resultado anterior.

Los experimentos a que se ha hecho alusión son los sigugientes:

Primer experimento. — Se apoyó una varilla de madera de haya de 80 cm. de longitud sobre dos soportes del mismo nivel, suspendidos de dos resortes. Los puntos de apoyo de la varilla estaban situados a 8 cm. del extremo más próximo. Se cargó la varilla con un peso en su punto medio y se midió el descenso de los apoyos.

Los extremos de la varilla tomaron las inclinaciones que era de presumir como consecuencia de la flexión.

Se retiró luego la carga y se colocaron en forma conveniente dos piezas metálicas que obligaban a los extremos de la varilla á permanecer horizontales. Se volvió a poner el mismo peso en el centro de la varilla y se observó claramente que el alargamiento de los resortes era en este caso mucho mayor.

Se deduciría de esto que aún en el caso de cargas simétricas las reacciones en los aopyos de una viga empotrada no son iguales a los de la misma viga en la hipótesis de que sea isostática.

Segundo experimento. — Se apoyaron dos varillas de idéntica sección transversal sobre dos pilares de manera que tuviesen ambas la misma luz. Los puntos de apoyo distaban del extremo más próximo 4 cm. en una de las varillas y 8 cm. en la otra.

Se cargaron las dos con pesos iguales en los puntos medios de sus respectivas longitudes. Se produjo la flexión. Se fueron sobreponiendo después, cargas encima de los extremos de las dos varillas hasta dejarlos en posición horizontal. Sobre las porciones de 4 cm. se hizo necesario poner cargas mayores que las depositadas sobre las de 8 cm. Resultaría de este experimento qué las reacciones de los apoyos varían con las longituds de las partes empotradas.

2. Puesto que es posible aplicar a una cierta sección de una viga un momento de valor determinado mediante sistemas de fuerzas distintos, es decir, no equivalentes, se presenta el problema de conocer cuál es y cómo actúa en la realidad el par de fuerzas que da origen al momento de empotramiento en las vigas de hierro o de madera empotradas en macizos de mampostería, y como consecuencia surge la duda de cuál será el verdadero valor de las reacciones de los apoyos.

Consideremos los sistemas no equivalentes que nos muestran las figuras 2*a*, 2*b*, 2*c*, 2*d*, 2*e*, los cuales engendran respectivamente, los mismos momentos m_1 y m_2 en las secciones A_1 y A_2 de una viga.

Se supone que nos referimos a una viga recta horizontal, con apoyos simples en A_1 y A_2 y que se cumplen también las condiciones impuestas a las vigas que, de ordinario, se estudian en Resistencia de Materiales: simetría respecto al plano vertical que pasa por la fibra media, que las cargas están en ese plano, etc.

Fig. 2a. Primer caso. — Fuerza vertical P a la izquierda de A_1 y a la distancia d_1 de ese punto. (Sin la fuerza P').

Se produce en A_1 una reacción R_a dirigida hacia arriba y en A_2 una P_2 de sentido contrario. Las ecuaciones de la Estática expresan que

$$R_a = P + P_2 \qquad -m_1 = -Pd_1 = P_2 l \qquad P_2 = \frac{-m_1}{l} \qquad [1]$$

Segundo caso. — Fuerza P' (sin la fuerza P) a la derecha de A_2 distando d_2 de ese punto.

Se tiene, análogamente:

$$R_b = P' + P_1' \qquad m_2 = P' d_2 = -P_1' l \qquad P_1' = \frac{-m_2}{l} \qquad [2]$$

Tercer caso. — Las fuerzas P y P' actúan al mismo tiempo. Las reacciones R_1' y R_2' valen ahora:

$$R_1' = P + P_2 - P_1' \qquad R_2' = P' + P_1' - P_2 \qquad [3]$$

Fig. 2b. Primer caso. — La viga está sometida a la flexión por el par de fuerzas P de la zquierda, (sin las fuerzas P').

En A_2 hay una reacción P_2. Llamando F_a a la suma de las fuerzas que obran en A_1 hacia arriba, resulta:

$$F_a = P + P_2 \qquad -m_1 = -Pd_1 = P_2 l \qquad P_2 = \frac{-m_1}{l} \qquad [4]$$

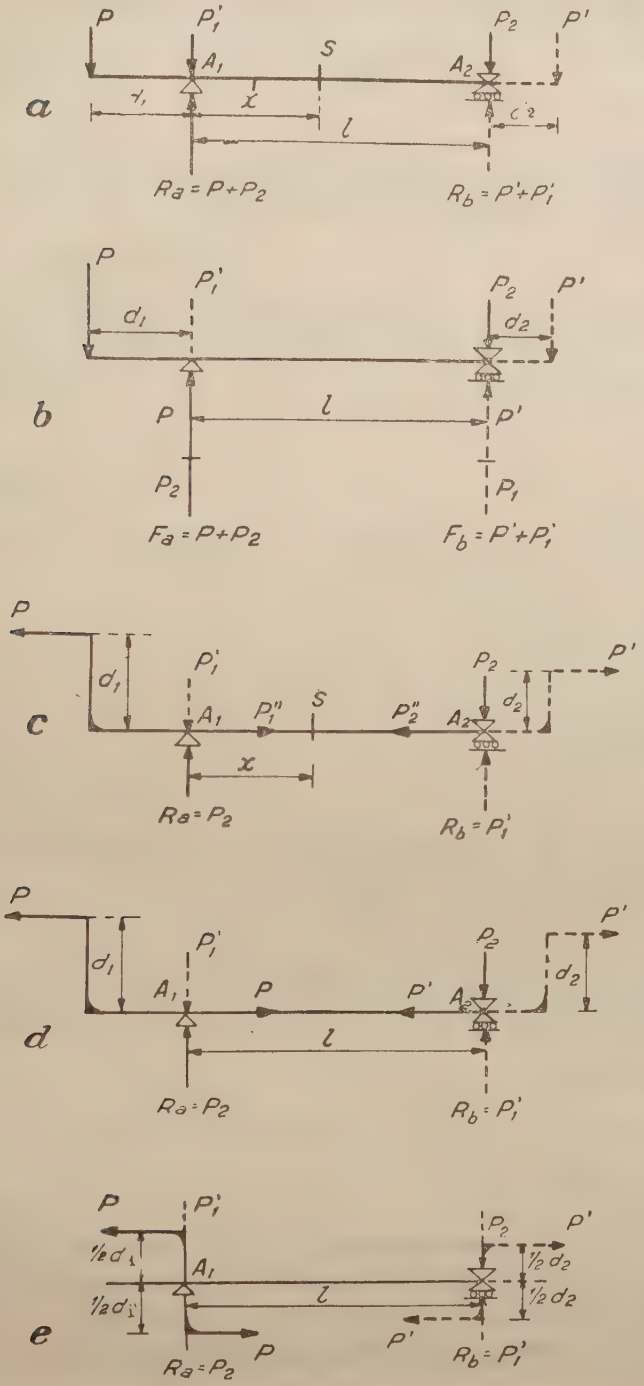

a
P
P'1
A1
S
P2
P'
A2
x
l
Ra = P+P2
Rb = P'+P'1
b
d1
d'2
P
P'
P2
P1
Fa = P+P2
Fb = P'+P'1
c
P''1
P''2
Ra = P2
Rb = P'1
d
e
½d1
½d2

Fig. 2.

Segundo caso. — Aplicando solamente el par P' de la derecha hallamos

$$F_b = P' + P_1' \qquad m_2 = P' d_2 = -P_1' l \qquad P_1' = -\frac{m_2}{l} \quad [5]$$

Tercer caso. — Los dos pares P y P' entran simultáneamente en acción. Se ve entonces facilmente que

$$F_a' = P + P_2 - P_1' \qquad F_b' = P' + P_1' - P_2 \quad [6]$$

Fig. '2c. Primer caso. — Fuerza horizontal P a la distancia d_1 del eje neutro de la viga, (sin la fuerza P'). Se produce en A_2 la reacción P_2 hacia abajo en A_1 una R_a ascendente y otra horizontal P''_1. Las condiciones de equilibrio exigen que

$$R_a = P_2 \quad P_1'' = P \quad -m_1 = -Pd_1 = P_2 l \quad P_2 = \frac{-m_1}{l} \quad [7]$$

Considerando en esta figura otros dos casos semejantes a los de las anteriores, se obtendrá:

Segundo caso. —

$$R_b = P_1' \quad P' = P_2'' \quad m_2 = P' d_2 = -P_1' l \quad P_1' = -\frac{m_2}{l} \quad [8]$$

Tercer caso. —

$$R_1' = P_2 - P_1' \qquad R_2' = P_1' - P_2 \quad [9]$$

Fig. 2d. — Par de fuerzas horizontales P a la izquierda, y par P' a la derecha según indica la figura.

P_2 = reacción en A_2

Analizando sucesivamnete tres casos con criterio semejante al seguido en el estudio de las figuras anteriores, podemos escribir

Primer caso.. —

$$R_a = P_2 \qquad -m_1 = -Pd_1 = P_2 l \qquad P_2 = \frac{-m_1}{l} \quad [10]$$

Segundo caso. —

$$R_b = P_1' \qquad m_2 = P' d_2 = -P_1' l \qquad P_1' = \frac{-m_2}{l} \quad [11]$$

Tercer caso. —

$$R_1' = P_2 - P_1' \qquad R_2' = P_1' - P_2 \quad [12]$$

Fig. 2e. — Haciendo las tres hipótesis en el mismo orden y en forma parecida a las establecidas en los sistemas examinados, se encuentra de inmediato:

Primer caso. —

$$R_a = P_2 \qquad -m_1 = -P\,d_1 = P_2\,l \qquad P_2 = \frac{-m_1}{l} \qquad [13]$$

Segundo caso. —

$$R_b = -P_1' \qquad m_2 = P'\,d_2 = -P_1'\,l \qquad P_1' = \frac{-m_2}{l} \qquad [14]$$

Tercer caso. —

$$R_1' = P_2 - P_1' \qquad R_2' = P_1' - P_2 \qquad [15]$$

Cuando m_1 sea igual a m_2, P_2 y P'_1 tendrán el mismo valor.

3. Expuesto lo que antecede podemos formular esta pregunta: Cuando una viga recta horizontal, empotrada por ambos extremos en muros de mampostería, esté sometida a la acción de un cierto sistema de cargas verticales que dé origen en los apoyos a momentos — los de empotramiento — que tengan respectivamente los mismos valores m_1 y m_2 que tienen los producidos por los sistemas de la figura 2 en las secciones A_1 y A_2, — en los terceros casos, — ¿cuál de esos sistemas, o qué otro sistema es el equivalente *al par que engendra los momentos de empotramiento en dichos apoyos?*

En el estudio de la viga empotrada se suelen designar esos momentos por letras — $m_1\,m_2$ o $\mu_1\,\mu_2$ etc. — pero no se indica cuáles son ni cómo están las fuerzas de los pares generadores de momentos. Y como *todo momento es un producto de una fuerza por una longitud* nos interesa averiguar para aclarar nuestra duda *cuáles son y cómo están esos factores* en la viga empotrada. En otros términos: Cómo se realiza el fenómeno físico del empotramiento.

Del método adoptado por Saliger para calcular en el ejemplo mencionado, la reacción del apoyo A_1, se deduce que parece correcto reemplazar por una fuerza A_2 (Fig. 1) el efecto del empotramiento o, lo que es lo mismo, que es admisible sustituir por esa fuerza A_2 el peso de la mampostería que por descansar sobre la parte empotrada de la viga asegura la existencia del empotramiento obligando a la sección en A_1 a mantenerse inmóvil, vertical. Esa fuer-

za A_2 sería por lo tanto la resultante de las presiones verticales que ejerce la mampostería sobre el trozo de viga introducida en el muro.

4. Sirviéndonos del mismo procedimiento que emplea Saliger en su ejemplo, determinemos el valor de las reacciones en los apoyos de una viga metálica horizontal, empotrada por ambos extremos en macizos de mampostería y solicitada por una fuerza Q en el punto

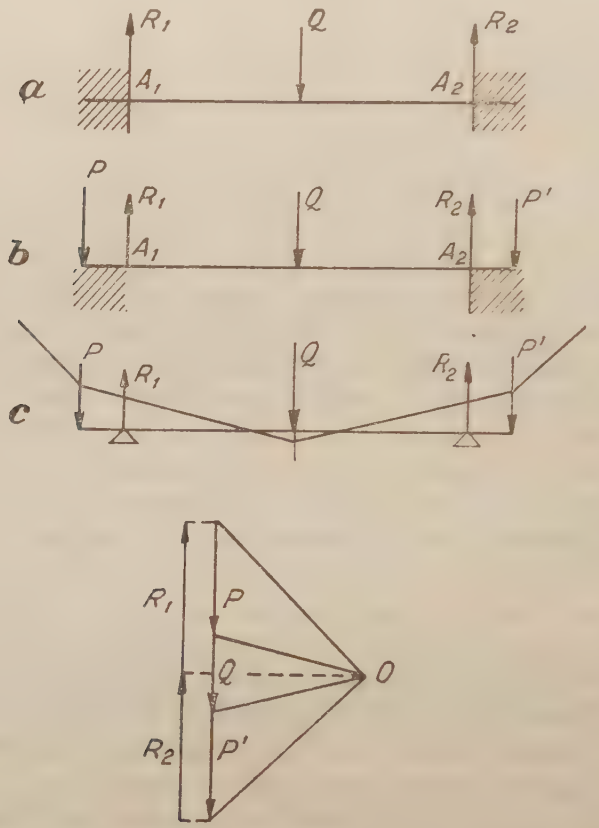


Fig. 3.

medio de su longitud libre (Fig. 3). Podemos sustituir, entonces, por las fuerzas verticales P y P' el peso del muro soportado por las porciones de viga empotradas, siempre que P y P' tengan tales intensidades que mantengan verticales las secciones A_1 y A_2 de la viga.

El cálculo gráfico o analítico de esas reacciones nos da:

$$R_1 = \frac{Q}{2} + P \qquad R_2 = \frac{Q}{2} + P' \qquad [16]$$

o llamando R_1' y R_2' a las reacciones cuando la misma viga está libremente apoyada, se tiene

$$R_1 = R_1' + P \qquad R_2 = R_2' + P' \qquad [17]$$

Estas fórmulas nos dicen que aún en el caso de ser simétricas las cargas, los valores de las reacciones en la viga metálica empotrada en muros, no son iguales a los de las reacciones de la misma viga libremente apoyada. Esta consecuencia no está de acuerdo con las fórmulas de uso corriente, pero coincide con los hechos observados en nuestro primer experimento.

Se deduce también de las fórmulas [17] que

$$R_1 = f_1(P) = f_1\,[\varphi_1\,(d_1)] = F_1(d_1)$$
$$R_2 = f_2(P') = f_2\,[\varphi_2\,(d_2)] = F_2(d_2)$$

El segundo experimento confirma estos resultados.

5. Como en esta nota se hace un análisis y se propone, en ciertos casos, una rectificación de las fórmulas que expresan los valores de las reacciones en los apoyos de la viga horizontal empotrada en sus extremos, consideramos que deben recordarse los procesos que suelen seguirse para establecer esas fórmulas, cuando la viga esté sometida a la acción de un sistema cualquiera de cargas verticales.

Adoptaremos las siguientes notaciones de uso corriente:

l Longitud de la viga entre los apoyos (luz).

m_1 y m_2 Momentos de empotramiento en A_1 y A_2.

M Momento de flexión en una sección de abscisa x de la viga empotrada.

μ Momento de flexión en la misma sección suponiendo la viga simplemente apoyada en A_1 y A_2.

T Esfuerzo cortante en una sección de abscisa x de la viga empotrada.

θ Esfuerzo cortante en la misma sección suponiendo la viga simplemente apoyada en A_1 y A_2.

R_1' y R_2' Reacciones de los apoyos suponiendo la viga simplemente apoyada en A_1 y A_2.

R_1 y R_2 Reacciones de los apoyos A_1 y A_2 de la viga empotrada.

Algunos autores (1) comienzan la teoría de la viga empotrada demostrando un teorema, aplicable con ligeras variantes a un tramo cualquiera de una viga continua, que puede enunciarse así:

El momento de flexión M en una sección S de abscisa x de una viga empotrada en sus extremos, difiere solamente en una función lineal $A + B\,x$ *de esa abscisa, del momento de flexión* μ *que se produciría en dicha sección si la misma viga estuviese simplemente apoyada en ambos extremos* A_1 *y* A_2.

El esfuerzo cortante T en la misma sección S de la viga empotrada sólo difiere en una constante B del esfuerzo cortante θ *que se produciría en esa sección suponiendo la viga simplemente apoyada en sus extremos* A_1 *y* A_2 (2).

En efecto, todas las fuerzas exteriores que actúan sobre la viga a la izquierda de S incluyendo entre ellas a las reacciones de los vínculos que obligan a mantener el empotramiento, podemos suponerlas distribuídas en dos grupos.

Incluiremos en el primero todas las que están situadas a la izquierda de una sección situada inmediatamente a la derecha del apoyo A_1. Efectuando la reducción de todas estas fuerzas respecto al centro de gravedad de la sección que pasa por dicho punto obtenemos en este apoyo un momento de flexión — que no es otra cosa que el momento de empotramiento m_1 — y un esfuerzo cortante T_1'. Por consiguiente, la suma de los momentos de todas las fuerzas del primer grupo respecto al centro de gravedad de S es:

$$m_1 + T_1'\,x$$

Comprenderemos en el segundo grupo a todas las fuerzas situadas entre A_1 y S. Sea M' el momento de todas estas fuerzas con relación al centro de gravedad de S, tendremos entonces que el momento de flexión en la sección S será:

$$M = m_1 + T_1'\,x + M' \qquad [18]$$

(1) Bertrand de Fontviolant, Gastón Pigeaud y otros.

(2) Este teorema es un caso particular del que establece M. Levy en el primer tomo (pág. 280) de su obra *La Statique Graphique*, que dice: « *Cualesquiera que sean las cargas que actúan sobre una pieza de fibra media plana, estando estas cargas en el plano de dicha fibra que es el plano de simetría de la pieza, y cualesquiera que sean el número y la naturaleza de los apoyos, el momento de flexión M en un punto cualquiera G de la pieza puede obtenerse añadiendo al momento de flexión M' relativo a un punto G' fijo, arbitrariamente elegido a la izquierda de G, la suma de momentos con relación a G; 1°) de todas las fuerzas exteriores que obran entre G y G'; 2°) del esfuerzo cortante y de la compresión de la fibra media en el punto G'* ».

Imaginemos ahora una viga simplemente apoyada en A_1 y A_2, de la misma luz que la anterior y sometida al mismo sistema de cargas. Llamando μ al momento de flexión en la sección de abscisa x y θ_1 al esfuerzo constante en el apoyo A_1 resulta:

$$\mu = M' + \theta_1 x \qquad [19]$$

Restando miembro a miembro la exprsión [19] de la [18] se obtiene:

$$M - \mu = m_1 + (T_1' - \theta_1) x$$

o haciendo

$$m_1 = A \quad \text{y} \quad T_1' - \theta_1 = B$$

tendremos

$$M - \mu = A + Bx \qquad [20]$$

Derivando esta última con relación a x encontramos

$$\frac{dM}{dx} - \frac{d\mu}{dx} = B$$

o, de acuerdo con las notaciones adoptadas

$$T - \theta = B \qquad [21]$$

Las conocidas relaciones [20] y [21] demuestran el teorema enunciado y dan respectivamente el momento de flexión y el esfuerzo cortante en una sección cualquiera S de la viga empotrada, una vez halladas A y B que se determinan como se sabe haciendo sucesivamente $x = 0$ y $x = l$.

Cuando es $x = 0$ se anula también μ y como entonces M se convierte en el momento de empotramiento m_1, podemos escribir

$$M = m_1 = A$$

Para $x = l$ es igualmente $\mu = 0$, resultando $M = m_2$, luego

$$m_2 = m_1 + Bl, \quad \text{de donde} \quad B = \frac{m_2 - m_1}{l}$$

Las fórmulas [20] y [21] se transforman fácilmente en estas otras que son de uso corriente:

$$M = \mu + m_1 + \frac{m_2 - m_1}{l} x = \mu + m_1 \frac{l - x}{l} + m_2 \frac{x}{l} \qquad [22]$$

$$T = \theta + \frac{m_2 - m_1}{l} \qquad [23]$$

La fórmula [23] da el esfuerzo cortante en una sección cualquiera de abscisa x de la viga empotrada en función de m_1 y m_2 y del esfuerzo cortante que se obtendría en la misma sección suponiendo la viga simplemente apoyada en A_1 y A_2.

Si en el apoyo A_1 dicho esfuerzo se designa por T_1 tenemos

$$T_1 = \theta_1 + \frac{m_2 - m}{l}$$

siendo θ_1 el esfuerzo cortante en A_1 de la viga isostática.

Este valor T_1 del esfuerzo cortante en el apoyo A_1 es el que se toma como magnitud de la reacción en A_1, y en el caso de un sistema de cargas simétricas, resulta igual al que hallaríamos si supusiésemos la vida simplemente apoyada; pero ya vimos que en el ejemplo citado en el párrafo 4 y en el tomado de Saliger, no se llega a esa conclusión. La reacción en un apoyo y el esfuerzo cortante en la sección que pasa por él, no tienen siempre valores iguales.

6. — Las fórmulas conocidas que determinan los valores de las reacciones R_1 y R_2 en los apoyos de una viga empotrada en ambos extremos serán, empleando las notaciones adoptadas.

$$R_1 = R_1' + \frac{m_2 - m_1}{l} \qquad R_2 = R_2' + \frac{m_1 - m_2}{l} \qquad [24]$$

Y recordando que

$$-m_1 = P_2 l \qquad m_2 = -P_1' l$$

tendremos

$$R_1 = R_1' + P_2 - P_1' \qquad R_2 = R_2' + P_1' - P_2 \qquad [25]$$

Consideremos ahora una viga metálica, empotrada por ambos extremos en muros de mampostería y solicitada por cargas verticales.

Según se sabe, los efectos que la flexión de la viga trasmite a sus elementos, y las reacciones en los apoyos, pueden obtenerse mediante la superposición de estos dos estados.

1º) Se supone la viga libremente apoyada y que actúa sobre ella el mismo sistema de cargas.

2º) La viga está sometida únicamente a la acción de los momentos m_1 y m_2, designando por m_1 y m_2 los momentos del empotramiento originados por las cargas que sustente la viga.

Las reacciones en los apoyos se hallarán sumando a las de la viga libremente apoyada las procedentes de la acción de los momentos m_1 y m_2.

Y ahora preguntamos: ¿Cuál de los sistemas *a, b, c, d, e,* de la figura 2 —terceros casos— que producen respectivamente en A_1 y A_2 los momentos m_1 y m_2, es el que reemplaza mejor al fenómeno natural del empotramiento?

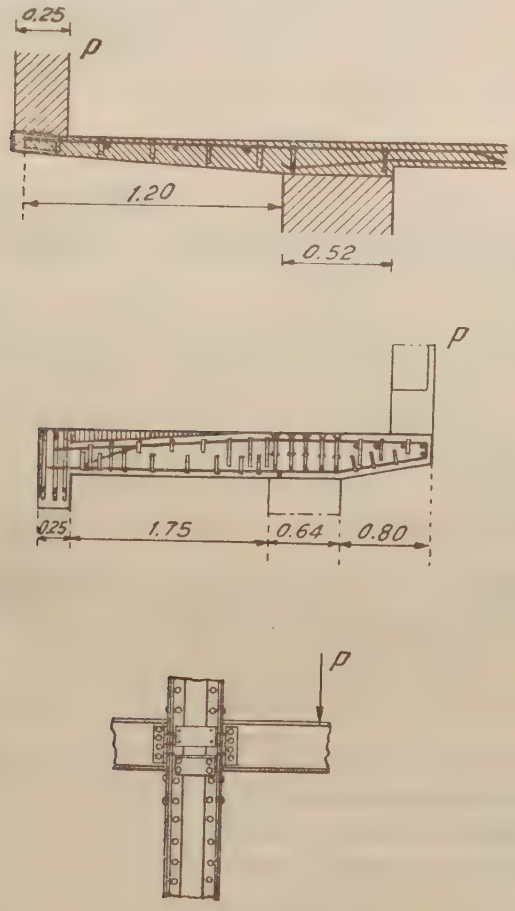


Fig. 4.

Por nuestra parte nos permitimos responder que creemos sinceramente, cuando se trata de vigas metálicas empotradas en muros, que es el sitema de la figura 2 *a*, tercer caso, porque las condiciones del empotramiento se cumplen mediante el efecto de cargas

verticales cuyos resultantes son P y P', o mejor, por el de las cargas uniformemente repartidas $p\,d_1$ y $p'd_2$.

Los valores de las reacciones serán en este caso

$$R_1 = R_1' + P + P_2 - P_1' = R_1' + \frac{m_2 - m_1}{l} + P \qquad [26]$$

$$R_2 = R_2' + P' + P_1' - P_2 = R_2' + \frac{m_1 - m_2}{l} + P' \qquad [27]$$

Las fórmulas clásicas

$$R_1 = R_1' + \frac{m_2 - m_1}{l} \qquad R_2 = R_2' + \frac{m_1 - m_2}{l}$$

o

$$R_1 = R_1' + P_2 - P_1' \qquad R_2 = R_2' + P_1' - P_2$$

corresponderán, según nuestro entender, a los tipos de empotramiento indicados en la figura 4.

En estos casos el sistema equivalente al fenómeno natural del empotramiento es, seguramente, alguno de los representados en las figuras 2 *c*, 2 *d*, 2 *e*, porque ahora el empotramiento es debido a esfuerzos cuyas direcciones son aproximadamente horizontales.

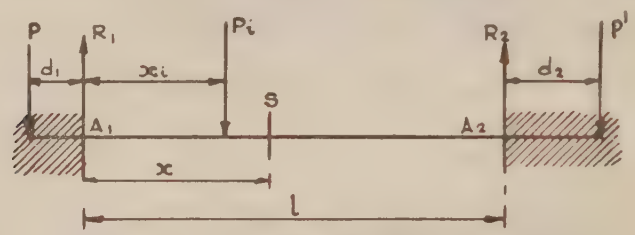


Fig. 5.

7. — Otros autores estudian la viga empotrada partiendo de las ecuaciones de equilibrio que establece la estática — dos en este caso — las cuales aplicadas al sistema representado en la figura 5 (sin las fuerzas P y P') nos dicen que

$$R_1 + R_2 - \Sigma P_i = 0$$
$$R_1\, l - m_1 + m_2 - \Sigma P_i\,(l - x_i) = 0 \qquad [28]$$

De esta última se obtiene

$$R_1 = \frac{\Sigma P_i\,(l - x_i)}{l} + \frac{m_1 - m_2}{l}$$

y como el primer término del segundo miembro de la relación anterior es la reacción del apoyo A_1 suponiendo la viga simplemente apoyada en A_1 y A_2, tendremos

$$R_1 = R_1' + \frac{m_1 - m_2}{l} \qquad [29]$$

que es la misma fórmula hallada anteriormente (3).

Si actuasen también en la viga cargas continuas, se introducirían entonces en las ecuaciones términos de la forma

$$\int_{x_j}^{x_k} f(x)\, x dx$$

El momento de flexión y el esfuerzo cortante en una sección de abscisa x se obtienen por medio de las conocidas relaciones:

$$M = R_1 x - m_1 - \Sigma P_i (x - x_i) \qquad [30]$$

$$T = R_1 - \Sigma P_i . \qquad [31]$$

De estas expresiones y de las que dan los valores del momento de flexión μ y el esfuerzo cortante θ en la misma sección cuando suponemos la viga simplemente apoyada en A_1 y A_2, se deducen en todos los cursos de Resistencia de materiales las fórmulas ya encontradas

$$M = \mu - \left[\frac{m_1 (l - x)}{l} + m_2 \frac{x}{l}\right] \qquad [32]$$

$$T = \theta + \frac{m_1 - m_2}{l} \qquad [33]$$

Si en este caso general de cargas se calculan las reacciones R_1 y R_2 siguiendo el método utilizado por Saliger en su ejemplo ya citado y aplicado también para obtener los valores de las reacciones en los apoyos de la viga tratada en el párrafo 4, encontramos

$$-(l + d_1) P + R_1 l - \Sigma P_i (l - x_i) + d_2 P' = 0$$

(3) La diferencia que se observa en los signos de algunos términos se debe a que los autores citados en la nota 1 del párrafo 5 no introducen explícitamente los signos de los términos. Esta observación debe tenerse presente en todo lo que sigue.

de donde

$$R_1 = \frac{l + d_1}{l} P + \frac{\Sigma P_i (l - x_i)}{l} - \frac{d_2}{l} P'$$

o

$$R_1 = P + \frac{P d_1}{l} - \frac{P' d_2}{l} + R_1' = P + R_1' + \frac{P d_1 - P' d_2}{l} \quad [34]$$

y finalmente

$$R_1 = P + \frac{m_1 - m_2}{l} + R_1' . \quad [34']$$

En forma semejante se hallaría

$$R_2 = P' + \frac{m_2 - m_1}{l} + R_2' \quad [35]$$

8. — Antes de proseguir nuestro estudio vamos a permitirnos una ligera aclaración relativa a la ecuación de momentos [28] y a las fórmulas [30] y [32] que dan el momento de flexión en una sección de abscisa x de la viga empotrada.

En las dos primeras se supone que los momentos de empotramiento m_1 y m_2 son constantes para cualquiera sección de la viga comprendida entre A_1 y A_2, mientras que en la última, como m_1 y m_2 vienen multiplicados respectivamente por $\frac{l - x}{l}$ y $\frac{x}{l}$ parecería que variasen linealmente con la abscisa de la sección.

Para explicar esta aparente contradición nos referiremos al caso de la figura 5, en la cual se produce en A_1 un momento. Recordando que la reacción en A_1 es [34] $R_1 = R'_1 + P - P_2 + P'_1$ se deduce que el momento de flexión en la sección S de abscisa x es en este sistema:

$$M = -P(x + d_1) + R_1 x - \Sigma P_i (x - x_i) = -P d_1 + R_1' x - \\ - \Sigma P_i (x - x_i) + (P_1' - P_2) x = \mu - P d_1 + (P_1' - P_2) x$$

o

$$M - \mu = -P d_1 + (P_1' - P_2) x$$

El término $P d_1$ que es constante para todo punto situado entre A_1 y A_2, es el momento del par que forman la resultante de todas las fuerzas que obran a la izquierda de A_1 y su reacción en ese

apoyo, momento que es invariable para cualquier punto del plano. Este momento no es otra cosa que el momento de empotramiento m_1. A este se suma para obtener el momento de flexión en la sección S el término $(P_1' - P_2)x$ o sea el momento del esfuerzo cortante en A_1 de las reacciones de m_1 y de m_2 en ese apoyo el cual varía linealmente con la abscisa de la sección S. Resulta entonces

$$M - \mu = - m_1 + \frac{m_1 - m_2}{l} x$$

o lo que es igual

$$M - \mu = - \left(m_1 \frac{l - x}{l} + \frac{m_2}{l} x \right)$$

El segundo miembro de la primera igualdad y, bajo otra forma, también el de la segunda, es la función lineal $A + Bx$ diferencia entre el momento en S de la viga empotrada y el que se obtendría suponiendo la viga simplemente apoyada. Su gráfica que evidentemente es la misma para las dos formas del segundo miembro (Fig. 6) se presenta para la primera como un rectángulo de base l y de altura m_1 aumentado en un triángulo de la misma base y de altura igual a $m_2 - m_1$. La correspondiente al segundo miembro de la segunda ecuación la constituyen dos triángulos $A\,B\,C$ y $A\,D\,C$ de base l y de alturas m_1 y m_2. Pero hay que tener bien en cuenta que las ordenadas de estos triángulos no representan de ningún mo-

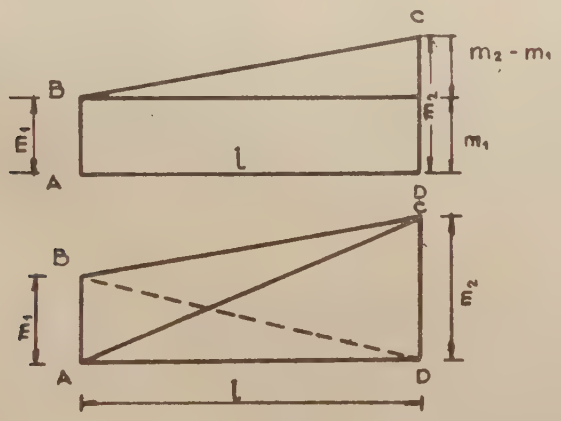


Fig. 6.

do los momentos de empotramiento para las distintas secciones de la viga.

9. — Para encontrar las verdaderas magnitudes de las reacciones R_1 y R_2 habrá que calcular los valores de P y P' o, en el caso más general, los de los términos complementarios que respectivamente habrá que agregar a las dos fórmulas [24].

Puede alcanzarse ese resultado haciendo uso del teorema de Mohr, siempre que se conozca la ley de repartición de las cargas verticales que actuando sobre d_1 y d_2 engendran los momentos m_1 y m_2 de empotramiento (1).

Recordemos para ello que aplicando, respectivamente, en los extremos A_1 y A_2 de una viga horizontal isostática, los momentos m_1 y m_2, la deforman de modo tal que los ángulos θ_1, θ_2 que la horizontal forma con las tangentes a la elástica en sus extremos tienen por valores absolutos

$$\theta_1 = \frac{m_1 l}{3 EI} + \frac{m_2 l}{6 EI} \qquad \theta_2 = \frac{m_2 l}{3 EI} + \frac{m_1 l}{6 EI}$$

Suponiendo ahora que m_1 y m_2 sean los momentos en los apoyos de una viga empotrada y θ_1', θ_2' los ángulos de la horizontal con las tangentes en los extremos de la elástica de la misma viga libremente apoyada, es evidente que las condiciones de empotramiento quedarán satisfechas si se verifica que

$$\theta_1 = -\theta_1' \qquad \theta_2 = -\theta_2'$$

Como θ_1' y θ_2' son respectivamente iguales a las reacciones ficticias que provienen de tomar como carga la superficie de momentos del actual sistema que obra sobre la viga, dividda por $E\,I$, resultará llamando F_{m_1} y F_{m_2} a esos cocientes:

$$F_{m_1} = -\frac{m_1 l}{3 EI} - \frac{m_2 l}{6 EI} \qquad F_{m_2} = -\frac{m_2 l}{3 EI} - \frac{m_1 l}{6 EI} \quad [36]$$

(1) Cuando la viga está empotrada en muros es admisible suponer que antes de cargarla las presiones que se ejercen sobre d_1 y d_2 están uniformemente repartidas; al recibir la carga se altera esa distribución. Como primera aproximación puede suponerse que es triangular.

El caso de cargas concentradas sobre d_1 y d_2 puede asimilarse al de los anclajes de los voladizos terminales de los tramos extremos de una viga Gerber.

Admitiendo que las cargas verticales que gravitan sobre d_1 y d_2 son las concentradas P y P', y puesto que $m_1 = Pd_1$ y $m_2 = P'd_2$ tendremos

$$F_{m_1} = -\frac{Pd_1 l}{3EI} - \frac{P' d_2 l}{6EI} \qquad F_{m_2} = -\frac{P' d_2 l}{3EI} - \frac{P d_1 l}{6EI} \quad [37]$$

Si las presiones que se ejercen sobre d_1 y d_2 están uniformemente repartidas, es decir, que son respectivamente pd_1 y $p'd_2$, las ecuaciones anteriores se transforman en estas

$$F_{m_1} = -\frac{p d_1^2 l}{6EI} - \frac{p' d_2^2 l}{12EI} \qquad F_{m_2} = -\frac{p' d_2^2 l}{6EI} - \frac{p d_1^2 l}{12EI} \quad [38]$$

Se llegaría a análogos resultados estableciendo sobre d_1 y d_2 otra cualquiera distribución de cargas cuya ley sea conocida.

Mediante las ecuaciones anteriores pueden calcularse P, P' y p, p'; en función de d_1 y d_2.

Para un estudio más riguroso del problema analizado debe recurrirse a la teoría de la Elasticidad.

Por ejemplo, para investigar cuál es la verdadera repartición de las cargas verticales que soportan las porciones empotradas d_1 y d_2 de la viga, y abordar otros problemas que pueden plantearse en el estudio de la viga empotrada (4).

(4) Véase: F. Takabeya. — *Étude des pièces encastrées aux deux extremités.* París, Béranger, 1926.

Universidad de Buenos Aires.
Facultad de Ciencias Exactas,
Físicas y Naturales

Noviembre de 1944.

LA CIRCULACION AEREA SUPERIOR EN VERANO

POR EL

TENIENTE DE NAVIO EMILIO L. DIAZ

Summary. — This work refers to the upper air circulation aloft in Argentina in summer, from the surface to 9000 meters. Resultant winds are calculated, showing a cyclonic movement of the air below 2000 m. level around the summer termic depression in central Argentina and an anticyclonic circulation at 3000 m. to 4000 m. on this region.

At higher levels, 8000 meters, high pressure is found near the peruvian coast and a low somewhere towards the Soutd Orkneys.

Streamlines are drawn, denser where winds are stronger, assuming a geostropic scale.

The autor presents, also, a fórmula for easy calculation of the reciprocal of the gradient, based on wind velocity and a tabulation of the formula's constant as a function of latitude and density.

Este trabajo se basa en el estudio de los sondajes aerológicos efectuados en nuestro país en los meses de verano (diciembre, enero y febrero) de los años 1942, 1943 y 1944.

Los datos empleados son los que se dan en la Carta del Tiempo, que edita la Dirección de Meteorología, y por lo tanto corresponden a los sondajes de la mañana.

Antes de seguir y a los efectos de considerar el grado de validez a asignar al estudio realizado y que más adelante se verá, conviene enunciar algunas investigaciones que hemos efectuado sobre la influencia que el calentamiento diurno ejerce sobre el gradiente térmico vertical de la atmósfera.

En enero de 1943, con la colaboración del Teniente de Fragata D. Ignacio Albarenque, se realizaron en Puerto Belgrano una serie de sondajes térmicos, con aviones, en dos diferentes horas del día, a 0800 hs. y a 1400 hs. Los resultados medios, para una misma masa de aire, muestran que la inversión de temperatura producida por el enfriamiento nocturno excede ligeramente los 1000 metros, es decir, que en una misma masa de aire, el gradiente por arriba

de los 1000 metros es casi igual en la mañana y en la tarde. Por consiguiente, podemos concluir que la circulación atmosférica no es, por lo común, influenciada por el calentamiento diurno en las alturas superiores a los 1500 metros y por lo tanto, podemos suponer que los resultados que arrojen los cómputos estadísticos de los vientos superiores, realizados en base a los sondajes de la mañana, serán representativos de la circulación general atmosférica para los niveles más altos que los 1500 mts. indicados.

En la carta del tiempo las direcciones acusadas por los sondajes aerológicos se dan de 10° en 10° y sus velocidades en kilómetros por hora.

El estudio estadístico se hizo agrupando los vientos según 12 direcciones y atribuyéndolas en la siguiente forma: 350°, 360° y 010° al 360°; 020°, 030° y 040° al 030°; 050°, 060° y 070° al 060°; y así sucesivamente. Se determinaron las sumas de las velocidades, de todos los sondajes, registradas en cada agrupación de direcciones y en cada nivel y se determinaron sus componentes sur-norte y oeste-este. Se sumaron luego todas las componentes de las doce direcciones seleccionadas y finalmente se determinó el vector resultante. La magnitud de este vector fué dividida por el número total de observaciones efectuadas incluyendo las calmas, con lo que se obtuvo el vector viento resultante. Los niveles para los cuales se hizo el cálculo fueron el de superficie y luego de 1000 en 1000 metros, hasta 9000 en algunas estaciones.

Definimos el coeficiente de estabilidad del viento en la misma forma que lo hace Grimminger para Little América, esto es, el cociente entre la velocidad del viento resultante dividida por la velocidad media del viento. En esta forma es posible calcular un número que representa el grado de fijeza con que soplan los vientos.

Para el trazado de las líneas de corriente, cuya distancia entre ellas se tomó inversamente proporcional a la velocidad del viento resultante, se supuso al mencionado viento resultante como geotrópico.

La componente geotrópica del viento sale de

$$G = 2\,\delta\omega\,V \operatorname{sen}\varphi$$

En esta fórmula se tiene:

G: Gradiente barométrico.
δ: Densidad del aire.
ω: Velocidad angular de rotación de la tierra (0,00007292).
V: Velocidad del viento.
φ: Latitud.

Considerando que 1 mb = 100 unidades absolutas de presión y teniendo en cuenta que 1 milla marina = 1852 metros, para expresar a G en mb/millas tendríamos que hacer

$$\frac{100}{1852} G = 0{,}054\ G$$

con esto la fórmula del viento geotrópico quedaría

$$0{,}054\ G = 2\ \delta\ 0{,}00007292\ V \text{ sen } \varphi$$

para $\varphi = 35°$ es sen $\varphi = 0.574$, y por tanto

$$0{,}054\ G = 2\ \delta\ 0{,}00007292\ V\ 0{,}574$$

de donde

$$\frac{1}{G} = Dl = \frac{669{,}1}{\delta\ V}$$

pero como V se expresa en kilómetros por hora, teniendo en cuenta que 1 m/s = 3;6 km/h, la fórmula anterior queda

[1] $$Dl = \frac{669{,}1 \times 3{,}6}{\delta\ V} = 2408\ \frac{1}{\delta\ V}$$

Dl = distancia entre líneas de corriente en millas marinas;
δ = densidad del aire;
V = velocidad del viento en kilómetros por hora.

Los cocientes de $\frac{2408}{\delta}$ se calcularon para cada altura de acuerdo con la variación de δ, tomando $\delta = 1{,}226$ para la superficie del mar.

Para facilitar los cálculos puede construirse un abaco, en el cual se toman las velocidades del viento como abscisas y los valores de las distancias entre líneas de corriente (Dl) como ordenadas. En

el abaco se trazan una familia de rectas cada una de las cuales corresponde a un nivel determinado (según el correspondiente valor de δ).

En la constante 2408 el seno de la latitud entra como divisor, de manera que para otro valor φ de latitud, distinto de 35°, habría que hacer

$$\frac{2408 \text{ sen } 35°}{\text{sen } \varphi}$$

A los efectos del cálculo de los valores de *Dl* las estaciones se distribuyeron en tres grupos:

Salta, Corrientes y Córdoba	Latitud media 28° S
Paraná, C. Redentor, Tamarindos, V. Mercedes, C. Federal, Bahía Blanca y Cipolleti	Latitud media 35° S
Trelew y San Julián	Latitud media 46° S

En esta forma y teniendo en cuenta los distintos valores de la densidad del aire a diferentes alturas, es posible calcular una tablilla que dé los valores de la constante K de la fórmula[2] obtenida de la [1].

[2] $$K \frac{1}{V} = Dl$$

Valores de la constante K en funcion de la latitud y de la altura

Altura	δ	Latitudes		
		28°	35°	46°
0 m	1,226	2406	1965	1569
1000 m	1,112	2650	2165	1729
2000 m	1,007	2925	2391	1908
3000 m	0,909	3243	2650	2177
4000 m	0,819	3600	2940	2346
5000 m	0,736	4005	3273	2613
6000 m	0,660	4465	3650	2914
7000 m	0,590	5000	4080	3260
8000 m	0,525	5620	4590	3665
9000 m	0,466	6330	5168	4125

RESUMEN

NIVEL	PPP	DDr	Vr	DDp	Vm	E	Dl	n	PPP	DDr
	SALTA, lat. 25° long. 65°								C	
0 m (1)	07,2	037°	1,6	030°	3,3	0,48	—	99	09,0	082
1000 m		021°	1,2	020°	6	0,20	2200	92		046
2000 m		017°	3,1	020°	10	0,31	940	89		097
3000 m		294°	1,2	—	12	0,10	2700	76		184
4000 m		207°	9	190°	16	0,58	400	62		204
5000 m		186°	14,5	180°	26	0,56	280	51		226
6000 m		191°	19	190°	28	0,67	240	48		243
7000 m		211°	26	220°	38	0,69	190	42		251
8000 m		223°	34	240°	47	0,72	170	39		264
9000 m		232°	38	240°	54	0,71	170	28		
	PARANÁ, lat. 32° long. 61°								C.	
0 m (1)		102°	3	080°	8	0,38	—	169		
1000 m		032°	6,9	010°	26	0,28	310	162		
2000 m		155°	2,6	—	23	0,11	920	150		
3000 m		196°	8	210°	25	0,31	330	114		
4000 m		214°	13	210°	27	0,46	230	90		213
5000 m		237°	21	240°	33	0,63	160	58		275
6000 m		220°	26	220°	39	0,65	140	40		262
7000 m		225°	38	230°	46	0,83	110	17		244
8000 m	(2)	238°	35	240°	41	0,84	130	28		250
9000 m	(2)	240°	35	240°	45	0,78	150	16		250
	V. MERCEDES, lat. 34° long. 65°									
0 m (1)		322°	1,5	340°	5	0,29	—	207	12,0	045
1000 m		347°	8,4	330°	27	0,31	260	109		313
2000 m		006°	3	—	21	0,25	800	196		240
3000 m		296°	4,5	270°	29	0,30	590	175		299
4000 m		236°	15	230°	31	0,47	300	144		243
5000 m		230°	25	220°	37	0,67	130	111		242
6000 m		235°	32	230°	42	0,75	110	85		254
7000 m		235°	33	240°	46	0,72	120	57	(3)	226
8000 m		240°	32	240°	49	0,63	140	39	(3)	238
9000 m		226°	30	240°	44	0,70	170	19		
	CIPOLLETI, lat. 39° long. 68°									
0 m (1)	10,4	217°	3,5	230°	8	0,45	—	205	09,2	253
1000 m		242°	15	230°	38	0,38	140	199		244
2000 m		269°	18	260°	33	0,55	130	166		262
3000 m		277°	28	270°	40	0,70	95	135		260
4000 m		270°	36	270°	47	0,77	80	107		256
5000 m		266°	45	270°	54	0,83	75	89		255
6000 m		264°	50	270°	58	0,86	75	54		252
7000 m		264°	53	270°	63	0,84	75	38		258
8000 m		261°	53	270°	67	0,79	85	22		250
9000 m		256°	62	260°	76	0,81	85	10		

I

os (Verano)

p	Vm	E	Dl	n
°	10	0,48	—	191
°	25	0,38	280	186
°	22	0,11	1170	149
°	23	0,25	560	113
°	25	0,36	405	89
°	26	0,49	320	53
°	36	0,67	190	52
°	41	0,84	150	26
°	50	0,92	120	14

27° long. 59°

33° long. 70°

°	18	0,19	—	102
°	32	0,81	130	99
°	46	0,78	100	72
°	55	0,84	90	38
°	68	0,85	80	26
°	69	0,80	95	8

35° long. 58°

°	10	0,27	—	202
°	27	0,24	330	190
°	26	0,36	240	162
°	28	0,42	220	114
°	31	0,60	150	86
°	35	0,66	140	61
°	39	0,76	120	42
°	44	0,78	120	23
°	49	0,90	100	12

43° long. 65°

°	15	0,74	—	199
°	38	0,74	60	198
°	40	0,80	60	187
°	52	0,83	50	174
°	63	0,86	45	145
°	69	0,84	45	122
°	73	0,86	45	96
°	63	0,95	55	19
°	60	0,75	80	12

Córdoba, lat. 31° long. 64°

PPP	DDr	Vr	DDp	Vm	E	Dl	n
09,6	—	0,2	—	4	0,05	—	132
	008°	14	000°	28	0,50	190	176
	004°	8	000°	25	0,33	360	148
	250°	2	—	20	0,10	1620	119
	245°	10	250°	22	0,45	360	102
	245°	22	240°	32	0,69	180	91
	248°	33	250°	44	0,74	140	75
	245°	38	250°	51	0,74	130	56
	250°	52	250°	66	0,79	110	43
	261°	68	260°	77	0,88	95	25

Tamarindos, lat. 33° long. 69°

06,8	175°	6	170°	8	0,75	—	55
	178°	19	180°	24	0,80	110	55
	179°	8	190°	19	0,40	300	51
	325°	6	350°	19	0,34	440	40
	284°	15	300°	24	0,64	200	34
	256°	22	250°	31	0,72	150	30
	245°	34	250°	44	0,78	110	27
	251°	36	250°	49	0,74	110	23
	243°	32	240°	51	0,61	140	16

B. Blanca, lat. 39° long. 62°

11,4	314°	10	320°	21	0,50	—	161
	267°	18	270°	30	0,60	120	156
	261°	27	260°	30	0,90	90	142
	250°	28	250°	37	0,76	95	113
	240°	35	240°	43	0,82	85	78
	232°	31	240°	42	0,73	110	48
	235°	35	240°	48	0,73	100	33
	227°	25	230°	48	0,52	160	14
	232°	28	230°	50	0,56	160	10

San Julian, lat. 49° long. 68°

04,3	243°	19	230°	25	0,75	—	166
	254°	32	260°	40	0,80	55	162
	259°	41	260°	28	0,85	45	141
	262°	46	260°	54	0,85	45	100
	261°	56	260°	62	0,90	40	72
	262°	60	260°	68	0,88	45	50
	256°	60	260°	72	0,83	50	26
(4)	226°	48	230°	60	0,80	70	10
(4)	220°	54	230°	65	0,83	70	6

El conjunto de los resultados hallados está resumido en el cuadro I, en el cual se incluyen:

PPP = presión atmosférica media (Diciembre, Enero y Febrero) al nivel del mar, reducida a 0° C y a la gravedad normal.
DDr = dirección del viento resultante;
Vr = fuerza del viento resultante (km/h);
DDp = dirección predominante del viento a contar desde el norte.
Vm = fuerza media del viento (km/h);
E = coeficiente de estabilidad (Vr/Vm);
Dl = distancia entre líneas de corriente (millas marinas);
n = número de observaciones.

El significado de las llamadas es:

(1) Los datos del viento en la altura 0 m corresponden al nivel de la estación.
(2) Los resultados corresponden a la suma de las observaciones practicadas en Paraná y Rosario.
(3) Los resultados corresponden a la suma de las observaciones practicadas en la Capital Federal y Junín.
(4) Los resultados corresponden a la suma de las observaciones practicadas en San Julián y C. Rivadavia.

En el Cuadro I puede verse que los valores de Dl sufren la siguiente evolución en la región mediterránea y nordeste argentina, primero aumentan hasta el nivel de los 2000 ó 3000 metros, luego disminuyen en las zonas andinas hasta alcanzar su mínimo en los 7000 u 8000 metros y después aumentan ligeramente. Para la región austral la distancia Dl decrece desde la superficie hasta los 4000 ó 5000 mts. y luego aumenta. Es decir que la densidad de líneas de corriente varía según diferentes alturas para las diversas regiones, este estudio se resume en el Cuadro II.

En lo que respecta al coeficiente de estabilidad (E) puede notarse que tiene un mínimo, en las estaciones situadas al norte de los 35° S, para las alturas comprendidas entre 2000 y 3000 metros, mínimo que coincide con una región de transición radical en la dirección de los vientos resultantes.

Para estudiar el comportamiento de las corrientes aéreas se construyeron cartas de vientos resultantes para los distintos niveles, incluyendo también el trazado de las líneas de corriente. De ellas se desprende que la circulación del aire en altura sobre la Argen-

CUADRO II

VALORES DE LA DISTANCIA ENTRE LÍNEAS DE CORRIENTE (MILLAS) EN FUNCIÓN DE LA ALTURA Y DE LA ZONA (VERANO)

NIVELES	NORTEÑA				LITORAL			ANDINA				AUSTRAL				
	SALTA	CORRIENTES	CORDOBA	MEDIA	PARANA	C. FEDERAL	MEDIA	C. REDENTOR	TAMARINDOS	V. MERCEDES	MEDIA	B. BLANCA	CIPOLLETI	TRELEW	S. JULIAN	MEDIA
Superf.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1000 m	2200	280	190	890	310	330	320		110	260	185	120	140	60	55	95
2000 m	940	1170	360	820	920	240	580		300	800	550	90	130	60	45	80
3000 m	2700	560	1620	1630	330	220	280		440	590	520	95	95	50	45	70
4000 m	400	405	360	390	230	150	190		200	200	200	85	80	45	40	60
5000 m	280	320	180	260	160	140	150	130	150	130	135	110	75	45	45	70
6000 m	240	190	140	190	140	120	130	100	110	110	105	100	75	45	50	70
7000 m	190	150	130	155	110	120	115	90	110	120	105	160	75	55	70[6]	90
8000 m	170	120	110	135	130	100	115	80	140	140	120	160	85	80	70	100
9000 m	170		95	130	150		—	95		170	130		85			—

tina, en verano, presenta una morfología peculiar, que fluye de los efectos que el calentamiento estival ejerce sobre el aspecto del campo barométrico.

En efecto, el estudio de la distribución isobárica en superficie (Fig. 1) señala la presencia de una relativamente intensa zona de-

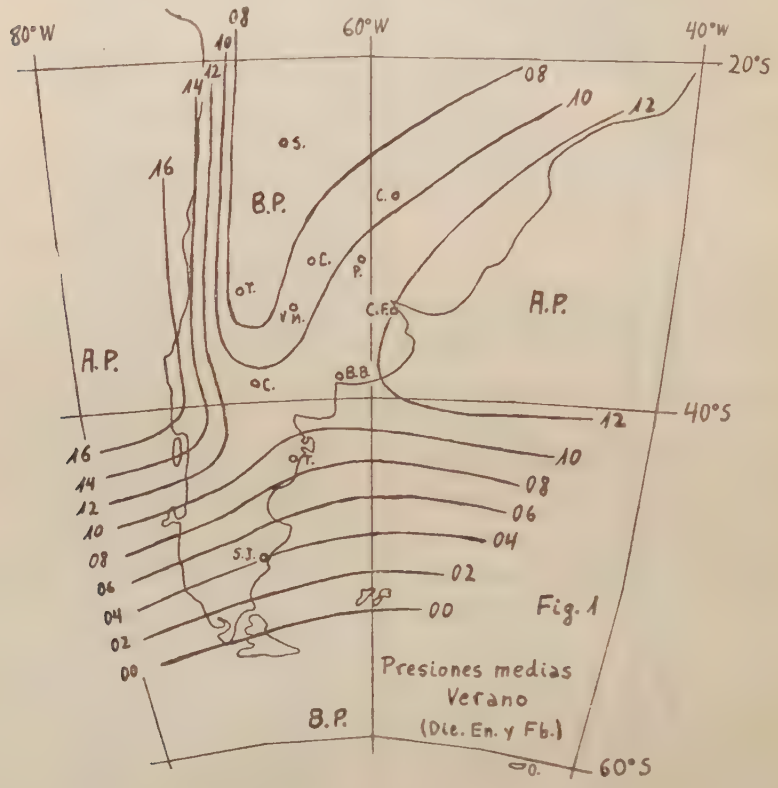


Fig. 1

presionaria de origen térmico, en la región mediterránea, y dos áreas anticiclónicas, una sobre el Atlántico y otra sobre el Pacífico, cuyos bordes muerden el continente por el este y el oeste respectivamente.

Para la del Atlántico ello ocurre aproximadamente en latitud 35° Sur, mientras que para la del Pacífico la latitud es de 40° S.

Si analizamos la circulación atmosférica resultante, cuyo resumen da el Cuadro I, durante el verano (diciembre, enero y febrero) es posible ver un movimiento del aire de forma ciclónica sobre la región central argentina (Fig. 2). Pero esto es solamente verdad

para los niveles comprendidos entre la superficie y los 2000 metros, desvaneciéndose ya para esta última altura.

A partir de los 3000 metros, altura en la cual el cambio es bien visible, se manifiesta la circunstancia contraria, es decir, sobre la zona mediterránea se observa una circulación resultante de aspecto anticiclónico (Fig. 3). Además, el borde de la alta presión del Atlán-

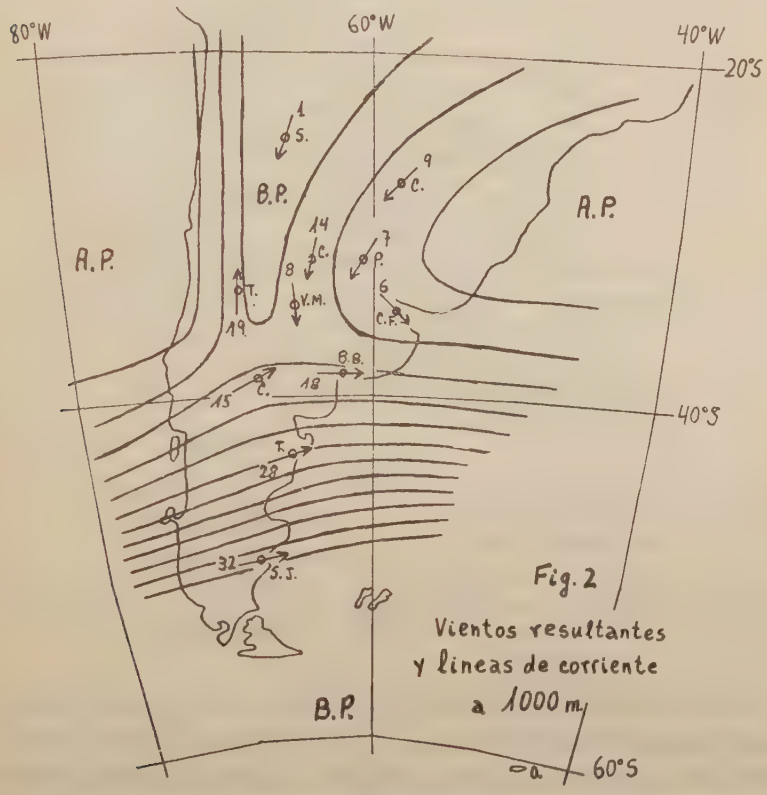
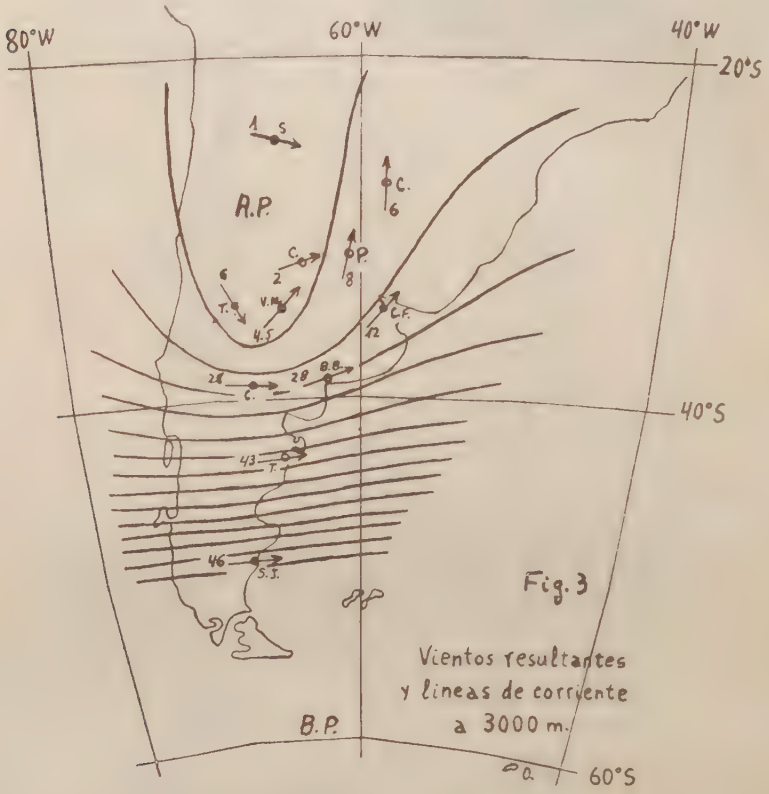


Fig. 2
Vientos resultantes y líneas de corriente a 1000 m.

tico se ha esfumado y los vientos tienen tendencia a soplar en sentido depresionario sobre este anticiclón.

En el nivel de los 3000 metros la alta presión parece estar centrada sobre Catamarca y La Rioja, pero si analizamos la circulación en alturas mayores, encontramos que el núcleo anticiclónico tiende a alejarse hacia el norte. A los 4000 metros dicho núcleo está sobre el sur de Bolivia y se extiende hasta La Rioja. En los 5000 metros el centro anticiclónico está próximo a Antofagasta (Chile) y, fi-

nalmente, en el nivel de los 8000 m. el alta parece encontrarse ubicada sobre la costa peruana (Fig. 4).



El movimiento del aire también muestra una zona de baja presión hacia el Sur de la Tierra del Fuego, pero si bien hasta los 5000 metros esa área de baja se sitúa casi directamente al sur de la Isla de los Estados, a los 8000 metros aparenta tener su centro en algún punto cercano a las Orcadas. Estas deducciones tienen por base los resultados que arrojan los sondajes realizados en San Julián, Trelew y Bahía Blanca. El trazado de las líneas de corriente a 8000 mts. de altura, muestra una mayor densidad a lo largo de la recta que une Trelew con Malvinas, distanciándose, en cambio, sobre la costa austral de Chile. Es lástima que carezcamos de datos de viento a grandes alturas en la costa chilena, en proximidades de latitud 50° S, pues de acuerdo a las velocidades que se

hubieran registrado podría haberse deducido la distancia entre líneas de corriente y por consiguiente confirmar o no, lo que se dedujo en base a las estaciones argentinas.

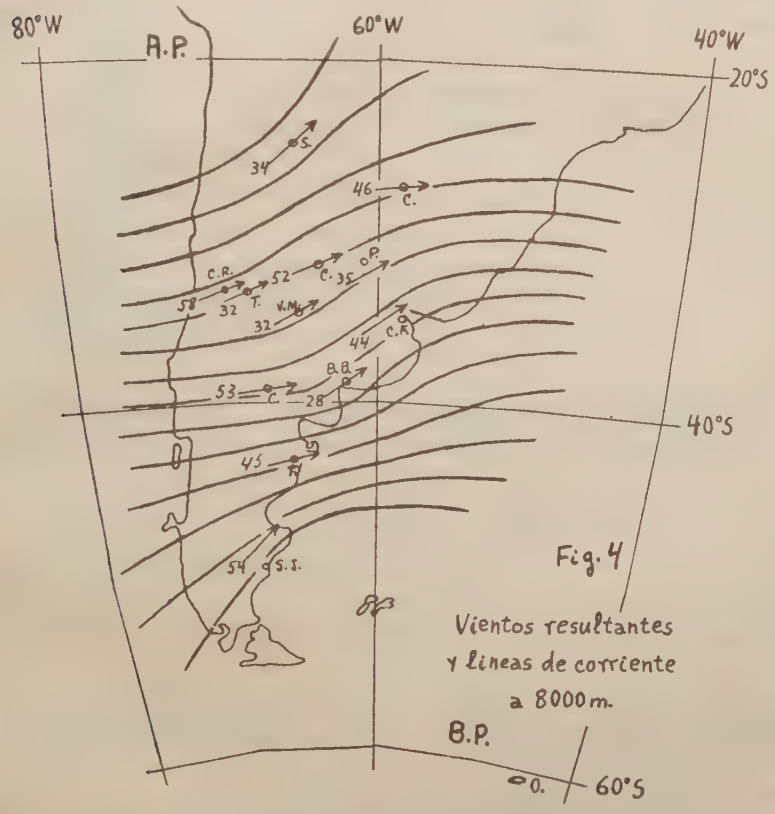


Fig. 4

Vientos resultantes y líneas de corriente a 8000 m.

En un trabajo aparecido en el número de junio de 1939, en el « Monthly Weather Review », cuyo autor es G. Grimminger, titulado « Preliminary results of pilot ballon ascents at Little América », se hace un estudio discriminativo de los sondeos efectuados con globos pilotos. El autor señala que en los niveles inferiores a 2500 metros el viento sopla del SE, cambiando a la altura indicada al sector SW hasta los 6000 metros y pasa luego al NW para los niveles superiores al mencionado. La componente E - W de los niveles inferiores resulta ser más importante en verano que en invierno. Para la componente W - E de las alturas superiores a 6000 metros ésta es mayor en invierno que en verano.

En resumen, Grimminger expresa que por debajo de los 2500 metros, en Little América, se registra un drenaje de aire polar hacia el Norte, el cual por efecto de la rotación terrestre se desvía soplando del SE. Por encima de los 6000 metros él observa una afluencia de aire desde el norte, el cual, desviado por la rotación terrestre acude desde el sector NW.

Los resutlados que hemos anotado para las estaciones argentinas, ubicadas en la zona templada, también acusan una región de presión baja en la altura situada hacia el círculo polar.

El anticiclón del Atlántico no existe como tal a los 8000 metros sobre la latitud 35° S, por lo menos en la zona próxima a Sud América, según lo que nosotros podemos deducir en base a la información de que disponemos. En cambio, en el Pacífico y sobre le zona tropical cercana a la costa del Perú aparece una región de alta.

Finalmente, el segundo punto de interés, ya mencionado, a que con el presente trabajo se llega, consiste en la transformación, en región anticiclónica, que experimenta la depresión térmica de la zona mediterránea argentina a los 3000 metros de altura.

Buenos Aires, Diciembre 14 de 1944.

FIRMES como la ROCA

PARA TODAS
SUS FUNDACIONES
Y EN CUALQUIER TERRENO

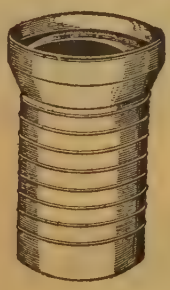
PILOTES FRANKI ARGENTINA

S. de R. Lda.

Administración:
Avda. Pte. ROQUE SAENZ PEÑA 788 — U. T. 34 - Defensa 4811
BUENOS AIRES

ARIENTI y MAISTERRA

EMPRESA CONSTRUCTORA



Caños de hormigón armado para desagües pluviales.

Caños corrugados de concreto simple, aprobados por Obras Sanitarias de la Nación para obras domiciliarias.

Absoluta Impermeabilidad.

MARCA REGISTRADA

SI SU PROVEEDOR NO LOS TIENE PIDALOS A SUS FABRICANTES

Av. VELEZ SARSFIELD 1851 - U. T. (21) 0075 - BUENOS AIRES

En un mundo de hierro y acero en constante actividad, la maquinaria industrial trabaja sin pausas para el progreso del país. Los lubricantes hacen posible la tarea armónica de los elementos mecánicos, garantizando eficiencia, seguridad y duración. La **Sección Asesoramiento Técnico Shell** aporta a la industria sus conocimientos y experiencia. **¡Consúltela!**

SHELL-MEX
ARGENTINA LTD.
PRODUCTOS DE PETROLEO

RODAMIENTOS
SKF

BUENOS AIRES • ROSARIO • CORDOBA • TUCUMAN
: : : : : MENDOZA • PARANA y RESISTENCIA : : : : :

COMPAÑIA DE SEGUROS

La Comercial e Industrial de Avellaneda

SOCIEDAD ANONIMA

Incendio **Cristales**

Avda. Mitre 429 (piso 1º) - Avellaneda — U. T. 22 - 7941 y 22 - 9138

CRISTALERIAS MAYBOGLAS

Sociedad de Responsabilidad Limitada

CAPITAL $ 1.000.000 m/n

•

ENVASES DE VIDRIO - TUBOS DE VIDRIO

BLOQUES PARA PISOS Y TABIQUES

Escritorio:
Caseros 3121
U. T. 61-0212

Fabrica:
Tabaré 1630
U. T. 61-3800

COMPAÑIA DE SEGUROS DE VIDA
SUD AMERICA
Av. R. SAENZ PENA 530 - BUENOS AIRES

La más poderosa y difundida en el pais.

Seguros de Vida en vigor:
$ 429.795.618 m/l.

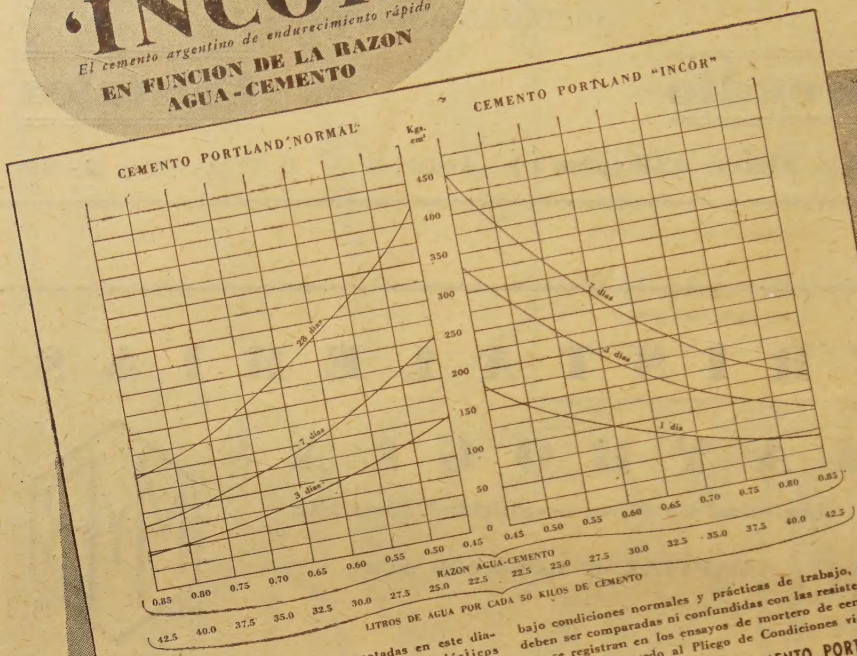
Reservas Técnicas:
$ 68.248.785 m/l.

Pagados a Asegurados y Beneficiarios desde 1923:
$ 126.859.182 m/l.

LA RESISTENCIA A LA COMPRESION DEL 'INCOR'

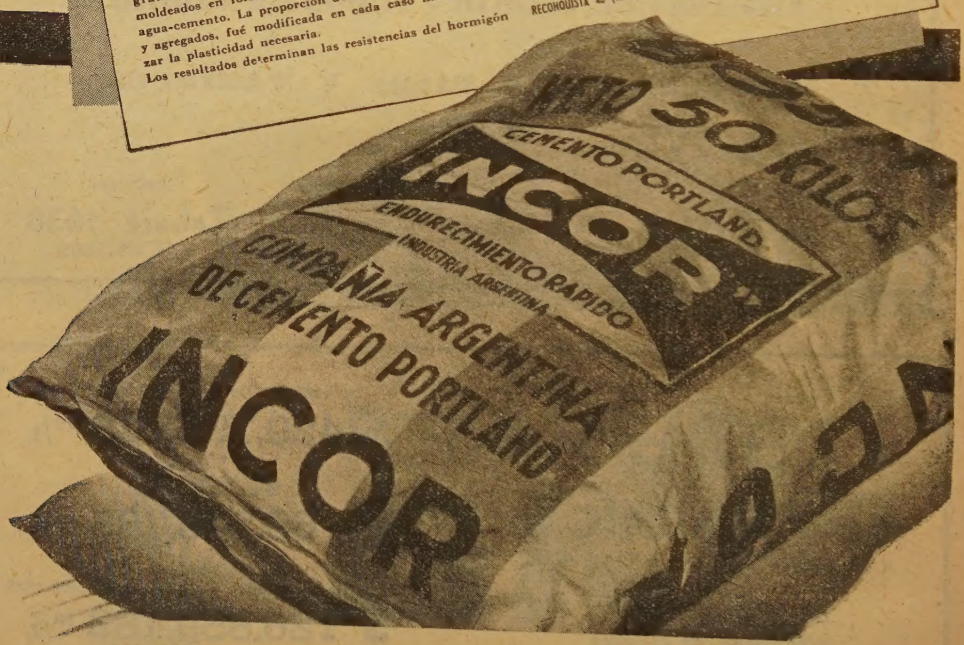
El cemento argentino de endurecimiento rápido

EN FUNCION DE LA RAZON AGUA-CEMENTO



Las resistencias a la compresión, anotadas en este diagrama, fueron registradas con hormigones plásticos moldeados en forma cilíndrica y con distintas razones agua-cemento. La proporción de la mezcla del cemento y agregados, fué modificada en cada caso hasta alcanzar la plasticidad necesaria.
Los resultados determinan las resistencias del hormigón bajo condiciones normales y prácticas de trabajo, y no deben ser comparadas ni confundidas con las resistencias que se registran en los ensayos de mortero de cemento portland, de acuerdo al Pliego de Condiciones vigente.

COMPAÑIA ARGENTINA DE CEMENTO PORTLAND
RECONQUISTA 46 (R. 3) - BUENOS AIRES • SARMIENTO 991 - ROSARIO



V CONGRESO PANAMERICANO DE FERROCARRILES

MONTEVIDEO - NOVIEMBRE DE 1945

(*Continuación*)

Tema 27. — Necesidad de la combinación de servicios ferroviarios en lo comercial, por la aplicación de tarifas directas, ordinarias o especiales.

Tema 28. — Modernización de la legislación ferroviaria en el sentido de dar más elasticidad a las tarifas y simplificar la reglamentación de la industria.

Tema 29. — Reglamentación del personal ferroviario:

a) Selección, escalafón y condiciones de ascenso.

b) Preparación técnica e instrucciones para primeros auxilios en casos de accidentes.

Tema 30. — Trenes especiales de Turismo a fin de fomentar las:

a) Relaciones Comerciales.

b) Relaciones Sanitarias.

c) Relaciones Intelectuales.

d). Relaciones de Amistad.

TEMAS COMUNES

CON EL II CONGRESO PANAMERICANO DE INGENIERIA

SECCIÓN A. — VIA Y OBRAS

Tema 1º — Cruces entre ferrocarriles, caminos y otras vías de comunicación: Aspectos técnico legal y económico.

SECCIÓN D. — CONTABILIDAD Y ESTADISTICA

Tema 2º — Análisis y clasificación de los gastos que determinen el costo de los diversos sistemas de transportes y criterio para calcularlos.

SECCIÓN E. — LEGISLACION Y ADMINISTRACION

Tema 3º — Convenciones sobre tráfico internacional.

SECCIÓN F. — ASUNTOS GENERALES

Tema 4º — Comunicaciones ferroviarias interamericanas: Nuevos aspectos de este problema ante el desarrollo alcanzado por otros medios de transporte.

Tema 5º — Coordinación de los diversos medios de transporte. Su reglamentación.

Tema 6º — Estudio de los sistemas de tarifas más convenientes al interés general frente a la competencia entre los diversos medios de transporte.

CUESTIONARIOS SUGERIDOS

SECCIÓN F. — ASUNTOS GENERALES

AL TEMA COMÚN 5º.

a — Presentación comentada de las leyes, decretos o disposiciones, que sobre coordinación de transportes se haya dictado en cada uno de los países del Continente americano. Fallas anotadas, mejoras propuestas.

b — Prolongación de servicios ferroviarios por carreteras o viceversa. Servicios carreteros transversales entre líneas férreas paralelas o viceversa.

c — Sustitución de líneas o ramales secundarios de tráfico antieconómico por otros medios de transporte.

d — Inconvenientes de la superposición de nuevos servicios, con inversión de nuevos vos capitales, en zonas o rutas que ya están ampliamente servidas por los medios actuales.

e — Conveniencia de que todos los servicios públicos de transporte terrestre se ajusten, en cada clase de servicios que presten, a una tarificación homogéna (nomenclatura de artículos, condiciones de aplicación, precios).

f — Medios para equilibrar la situación financiera de los distintos sistemas de transportes en forma equitativa. Cámaras compensadoras regionales o nacionales.

g — Modificaciones a introducir en las legislaciones para permitir el funcionamiento de esas Cámaras compensadoras.

h — Conveniencia del seguro obligatorio de pasajeros y de carga para todos los medios de transporte.

AL TEMA COMÚN 6º.

a — Simplificación de tarifas, reducción del número de tarifas especiales, estabilidad, adopción de la escala de mínimas a las exigencias de cada tráfico, etc.

b — Tarifas de pasajeros. Fomento del turismo.

c — Adopción por todos los ferrocarriles de la cláusula que permita, a efectos del aforo, la agrupación de cargas enviadas desde una misma localidad por un solo remitente a varios consignatarios en otra localidad, o de varios remitentes de una localidad a un solo consignatario.

d — Tarifas elásticas de máxima y mínima entre límites alterables por iniciativa del ferrocarril en períodos determinados, previo aviso ael público con una anticipación reducida.

e — Normas prácticas para reglar la competencia entre empresas farroviarias.